Méthodes numériques et langage C

Algèbre linéaire

R. Flamary

17 octobre 2018

Plan du cours

Rappels d'algèbre linéaire 4
- Vecteurs de $\mathbb{R}^n$ 4
- Application linéaire 7
- Matrices et propriétés 8

Représentation en langage C 16
- Blas et allocation mémoire 16
- Vecteurs 20
- Matrices 23
- Matrices creuses 25

Opérations vectorielles et matricielles 27
- Opérations sur les vecteurs 27
- Opérations matrice/vecteur 30
- Opérations matricielles 33

Résolutions d'équations linéaires 35
- Système d'équations et matrices 35
- Matrices particulières 39
- Pivot de Gauss 42
- Factorisation de matrice 48

Algebre linéaire

Principe

- Outils mathématiques permettant de modéliser les espaces vectoriels et des relations linéaires entre vecteurs.
- Relations linéaires simples à interpréter.
- Modélisation des données numériques sous la forme de tableau.

Exemples d'utilisation

- Systèmes de recommandation (Netflix, Amazon, Criteo).
- Moteurs de recherche (Google, Bing, Duckduckgo).
- Prédiction de valeurs réelles (Météo, cours de la bourse).
- Traitement du signal et des images (systèmes linaires, filtrage, reconstruction).
- Simulations physiques (méthodes d'élément finis, équations de la chaleur).

Espaces de dimension finie

Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur K est est un ensemble E muni de deux lois :

- L'addition $+ : E^2 \to E$, opération commutative et associative d'élément neutre $\mathbf{0}$ appelé vecteur nul.
- La multiplication par un scalaire $\cdot : K \times E \to E$, opération distributive et d'élément neutre 1.

Un vecteur de $\mathbf{v} \in E$ est définit par un symbole en gras dans ce cours.

Famille de vecteurs

- Soit une famille de vecteur $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,m}$.
- La famille est dite linéairement indépendante si la seule combinaison linéaire de la forme $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i = 0$ est celle avec $\lambda_i = 0, \quad \forall i$.
- Le sous-espace vectoriel engendré par une famille $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,m}$ dénoté $Vec(\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,m})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_i$.
- La famille $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,m}$ linéairement indépendante est une base de E si $Vec(\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,m}) = E$.

Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

Notation

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ peuvent être exprimés sous la forme :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{v}^\top = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

En l'absence du symbole $\top$, tous les vecteurs sont supposés vecteurs colonne.

Base canonique et norme

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille de vecteurs $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,n}$ telle que $v_i = \delta_i$ où δ_i est le vecteur dirac nul sur toutes ses composante à par la composante i égale à 1.
- La norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_i v_i^2$$

- La base canonique est orthonormale, c'est à dire orthogonale et chaque élément a une norme unité.

Produit scalaire

- Le produit scalaire entre deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ est l'application bilinéaire :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \sum_i x_i y_i$$

- La norme euclidienne au carré d'un vecteur est son produit scalaire avec lui même :

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$$

- Un espace vectoriel associé à un produit scalaire est appelé un espace pré-hilbertien.
- Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \quad |\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \rangle| \;\leq\; \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

- L'angle θ entre deux vecteurs peut être déterminé grâce à

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\theta$$

- Le produit scalaire peut être utilisé pour projeter un vecteur sur un autre vecteur.

Application linéaire

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application f de E vers F est dite linéaire si elle est additive et commute à la multiplication par les scalaires :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \\ \forall \mathbf{x} \in E, \forall \lambda \in K, \quad f(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Autrement dit, f préserve les combinaisons linéaires.

Noyaux et image

Pour toute application linéaire f de E dans F,

- Les vecteurs $\mathbf{x}$ de E tels que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ forment un sous-espace vectoriel de E, appelé le noyau de f et noté $Ker(f)$.
- les vecteurs $f(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x}$ dans E forment un sous-espace vectoriel de F, appelé l'image de f et noté $Im(f)$.
- Les dimensions des sous-espaces sont liées par le téorème du rang :

$$\dim(E) = \dim\ \mathrm{Ker}(f) + \dim\ \mathrm{Im}(f)$$

Matrice

Notation

Les matrices de $\mathbb{R}^{m \times n}$ sont définies par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall i, j$$

On pourra également utiliser $\mathbf{A}(:, k)$ pour désigner la $k$ième colonne de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}(k, :)$ pour désigner la $k$ième ligne de $\mathbf{A}$.
Attention, en C on utilise l'indexage à 0, $a_{1,1}$ correspondra donc à l'index entier $(0, 0)$.

Opérations de base

- Transposition

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = a_{j,i}$$

- Addition

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

- Multiplication par un scalaire α

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Multiplication matricielle

Multiplication matricielle

Soient deux matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$

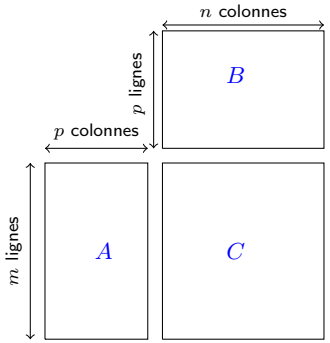
$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

avec $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Attention le produit matriciel n'est pas commutatif ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$).

Multiplication matrice vecteur

Si $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ est un vecteur de taille p alors

$$\mathbf{c} = \mathbf{Ab} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_k$$



Conseil : faire le dessin.

Matrice et application linéaire

- Toute application linéaire entre deux espaces munis chacun d'une base finie est représentable par une matrice.
- Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ peut donc être mise sous la forme :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

  - L'image $Im(f)$ de f est le sous espace $Vec(\mathbf{A}(:,k)_{k=1,\ldots,n})$ engendré par les colonnes de $\mathbf{A}$.
  - Le noyau $Ker(f)$ de f est le sous espace orthogonal aux lignes $\mathbf{A}(k,:)$ de $\mathbf{A}$.
- Cas particulier où $\mathbf{A} = \mathbf{v}^\top$ est un vecteur transposé, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeur réelle.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{x} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \sum_k v_k x_k$$

  La valeur de la fonction est une somme des composante x_k de $\mathbf{x}$ pondérées par $\mathbf{v}$.
- Cas particulier où $m = n$ et les lignes de $\mathbf{A}$ définissent une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$: l'application linéaire est un changement de base.

Matrices particulières

Matrice Diagonale ($m = n$)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

- Matrice diagonale :

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

- Matrice scalaire si $a_{ii} = C, \forall i$.
- Matrice identité si $a_{ii} = 1, \forall i$.

Matrice triangulaire

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

- Matrice triangulaire inférieure :

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

- $\mathbf{A}^\top$ est triangulaire supérieure.
- Strictement triangulaire inférieure si

$$i \leq j \Rightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

Exercice 1 : Multiplication matricielle

Soit les vecteurs et matrice suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculer les produits suivants :

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{u} = \qquad \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \qquad \mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} =$$

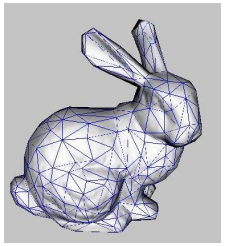
$$\mathbf{u}\mathbf{u}^\top = \qquad \mathbf{u}\mathbf{v}^\top = \qquad \mathbf{A}\mathbf{A} =$$

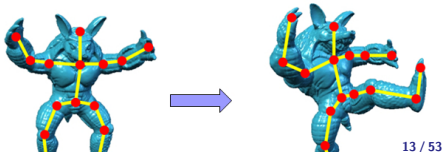
$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \qquad \mathbf{A}\mathbf{v} = \qquad \mathbf{B}^\top \mathbf{u} = \qquad \mathbf{A}\mathbf{B} =$$

Applications de l'algèbre linéaire

Infographie

- L'immense majorité des modèles 3D utilisés dans les jeux vidéo sont représentés par
  - Vecteurs de position dans $\mathbb{R}^3$.
  - Matrice d'adjacence.
- Les algorithmes d'illumination font souvent appel au produit scalaire entre un vecteur normal à la surface et la direction d'une source lumineuse ponctuelle.
- Les rotations et déplacements des membres des models 3D sont modélisés par des produits matriciels.





Applications de l'algèbre linéaire

Prédiction linéaire

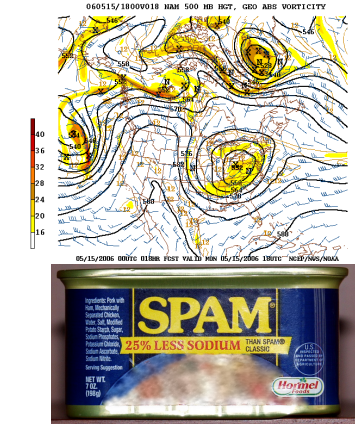
- Soit la fonction linéaire

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{x} = \sum_k v_k x_k$$

- $\mathbf{x}$ est un vecteur décrivant un objet et $\mathbf{v}$ le paramètre du modèle.
- Prédiction de valeur continue.

Exemples d'utilisation

- Météo (température, humidité, direction du vent à partir de mesures).
- Moteur de recherche (score à partir de requête web et pagerank).
- Détection de SPAM (score à partir d'email).



Applications de l'algèbre linéaire

Factorisation de matrice

- On cherche à factoriser une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sous la forme :

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{U}\mathbf{V}^\top$$

avec $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $p \ll m, p \ll n$

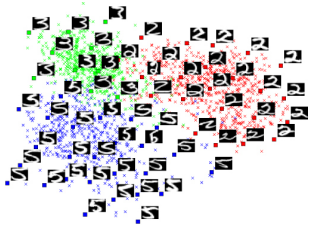
- $\mathbf{A}$ peut ne pas être complètement observée.

Exemples d'utilisation

- Recommandations Amazon.
- Recommandations Netflix.
- Clustering de réseaux sociaux.
- Réduction de dimension.

amazon.com

NETFLIX



Représentation mémoire en langage C

Représentation mémoire

- Il existe de multiples implémentations possibles (pointeurs, tableaux, ...).
- Dans ce cours nous nous concentrerons sur l'utilisation de pointeurs.
- Pour les matrices on veut un stockage mémoire contigu pour permettre une interface avec BLAS (interface standard pour les opérations d'algèbre linéaire).

Principe général

- Déclaration des vecteurs et matrices (pointeurs).
- Allocation mémoire dynamique au début du programme (`malloc`).
- Calculs effectués sur les vecteurs matrices alloués.
- Libération mémoire à la fin du programme (`free`).

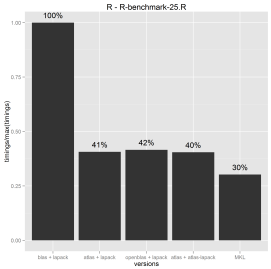
BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms)

Description

- BLAS est une spécification décrivant les diverses opérations de base en algèbre linéaire.
- L'origine de la spécification est une bibliothèque Fortran proposée en 1979.
- Une implémentation de référence en Fortran est disponible sur `http://www.netlib.org/blas/`.
- Une interface C appelée `cblas` est également disponible.
- Types de fonctions séparées par leur complexité (mémoire/temporelle).

Importance de la compatibilité

- De nombreuses bibliothèques fournissent une implémentation BLAS extrêmement optimisée.
- Choix de la bibliothèque au niveau système sous Linux.
- Exemples : Intel MKL, Atlas, OpenBLAS.



Source `http://blog.nguyenvq.com/`

BLAS et complexité

Les fonctions définies dans BLAS sont regroupées par niveaux de complexité algorithmique.

Niveau 1 (Complexité linéaire)

- Vecteur taille `n`.
- $T(n) = O(n)$, $S(n) = O(n)$
- Exemple : produit scalaire , multiplication par un scalaire, addition de vecteurs.

Niveau 2 (Complexité quadratique)

- Vecteur taille `n`, Matrice de taille `m`×`n`
- $T(n) = O(n^2)$ ou $O(mn)$, $S(n) = O(n^2)$ ou $O(mn)$
- Exemple : produit dyadique , multiplication matrice/vecteur.

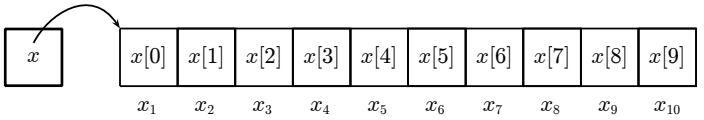
Niveau 3 (Complexité cubique)

- Matrice de taille `n`×`n`
- $T(n) = O(n^3)$, $S(n) = O(n^2)$
- Exemple : produit matriciel.

Convention des fonctions BLAS

- Les fonctions et procédures BLAS sont des fonctions Fortran en majuscule.
- Nom typique : `xNOMFONCTION` où x donne le type des vecteurs :
  - **S** Simple précision (`float`)
  - **D** Double précision (`double`)
  - **C** Complexe simple précision
  - **Z** Complexe double précision
- L'interface `cblas` fournit des fonctions C appelant directement les fonctions BLAS.
- Nom des fonctions cblas : `cblas_xnomfonction`
- Le passage de paramètre se fait toujours par référence pour les matrices et vecteurs (on donne les pointeurs)
- Les pointeurs doivent adresser des espaces mémoire alloués.
- Dans le cours nous donnerons le nom des fonctions BLAS associées aux opérations de base en algèbre linéaire.

Vecteurs en C



Principe

- Les vecteurs sont représentés par des pointeurs vers des flottants.
- Déclaration : `double *x;`
- Initialisation mémoire : `x=malloc(n*sizeof(double));` (`calloc` pour init. à 0)
- Utilisation : `x[i]=10.;` ou `*(x+i)=10.;`
- Libération mémoire : `free(x);`
- Attention à libérer la mémoire et à ne pas faire de `malloc` dans la boucle d'une procédure itérative.

Fonctions utiles pour les vecteurs

Code

```c
double *vinit(int n,double alpha)
{
  double * res= (double *)malloc(n*
       sizeof(double));
  for (int i=0;i<n;i++)
    res[i]=alpha;
  return res;
}
```

Code

```c
void vprint(int n, double *v)
{
  printf("[");
  for (int i=0;i<n;i++)
    printf(" %2.2f ",v[i]);
  printf("]\n");
}
```

Allocation et initialisation

- $\mathbf{v} \leftarrow \alpha \mathbf{1}_n$
- Allocation et mise à α des composantes d'un vecteur.
- Complexité $T()$:
- Complexité $S()$:

Impression écran

- Imprime un vecteur dans le terminal (sur une ligne).
- Complexité $T()$:
- Complexité $S()$:

Exercice 2 : Initialisation et impression

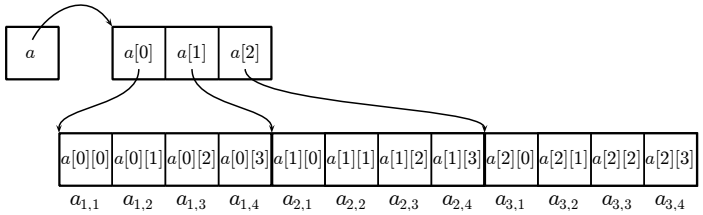
Quelle est la sortie imprimée dans le terminal pour le programme suivant :

Code source

```c
int n=10;
double *v1;
double *v2;
double alpha=3.;

v1=vinit(n,0);
v1[2]=1;

v2=vinit(n,1);
for (int i=0;i<n;i+=2)
  v2[i]*=i;

printf("v1=");vprint(n,v1);
printf("v2=");vprint(n,v2);

printf("Modification de v2:\n");
for (int i=0;i<n;i++)
  v2[i]*=alpha;
printf("v2=");vprint(n,v2);
```

Sortie

Matrices en C



Principe

- Les matrices sont représentées par un tableau de pointeurs (vers chaque ligne de la matrice).
- Déclaration : `double **a;`
- Initialisation mémoire : 2 `malloc` (un pour le tableau a, un pour les données)
- Utilisation : `a[i][j]=10.;`
- Libération mémoire (2 `free`) : `free(&a[0][0]);free(a);`
- Une espace mémoire contigu est nécessaire pour une interface avec BLAS.

Allocation et libération de mémoire

Code

```c
double **minit(int m, int n,double
     alpha)
{
  double ** res= (double **)malloc(m*
       sizeof(double *));
  double * data=(double *)malloc(m*n*
       sizeof(double));
  for (int i=0;i<m*n;i++)
    data[i]=alpha;
  for (int i=0;i<m;i++)
    res[i]=data+i*n;
  return res;
}
```

Code

```c

void mfree(double **a)
{
  free(&a[0][0]);
  free(a);
}
```

Allocation et initialisation

- $\mathbf{A} \leftarrow \alpha \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top$
- Allocation et mise à α des composantes d'une matrice.
- Complexité $T()$:
- Complexité $S()$:

Libération mémoire

- Libération de la mémoire (données et tableau de pointeurs).
- Complexité $T()$:
- Complexité $S()$:

Matrices creuses

Principe

- Stockage mémoire classique est $\ll$ dense $\gg$.
- Les matrices et vecteurs creux (parcimonieux) ont un petit nombre $n_v \ll n$ de valeurs différentes de 0.
- Il est plus efficace de stocker en mémoire une liste des positions et les valeurs correspondantes.
- Vecteur $\mathbf{v}$ de taille n avec n_v valeurs différentes de zéros format compressé :

$$\mathbf{i}_s \in \mathbb{N}^{n_v} \text{ et } \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^{n_v}$$

- Matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ avec n_v valeurs différentes de zéros format compressé :

$$\mathbf{i}_s \in \mathbb{N}^{n_v}, \quad \mathbf{j}_s \in \mathbb{N}^{n_v} \text{ et } \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^{n_v}$$

- La représentation ci-dessus s'appelle la représentation par coordonnée.
- Différents types de représentation (Yale sparse matrix, Compressed Sparse Column) sont plus ou moins efficaces selon les opérations à effectuer (opération matricielle, remplissage).

Matrice creuse (2)

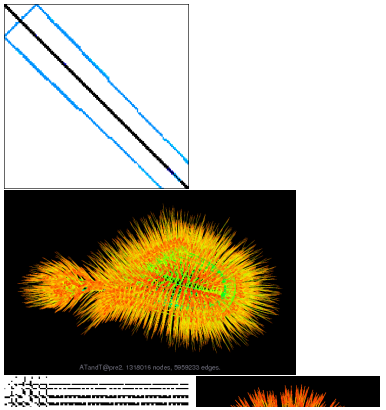
Exemple sous Matlab

- $n = 10000$
- $n_v = 100$
- Temps de calcul (en sec).

Opération	Dense	Creux
$\mathbf{v}^\top \mathbf{v}$	0.0001	0.0005
$\mathbf{Av}$	0.0525	0.0007
$\mathbf{AA}$	19.2145	0.0397

Exemples d'utilisation

- Données web (page web, profil).
- Graphe de relations (réseaux sociaux).
- Objets 3D en infographie.



Opérations de base sur des vecteurs

- Multiplication par un scalaire (xSCAL)

$$\mathbf{v} \leftarrow \alpha \mathbf{v}$$

- Somme et soustraction

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

- Produit scalaire (xDOT)

$$s \leftarrow \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

- Cas général (xAXPY)

$$\mathbf{y} \leftarrow \alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

- Complexité de toutes ces opérations :

$$T(n) = O(n), \quad S(n) = O(n)$$

Opérations sur des vecteurs en C

Multiplication par un scalaire (xSCAL)

- $\mathbf{v} \leftarrow \alpha \mathbf{v}$
- Fonction BLAS de Niveau 1 :
  `void cblas_dscal(int n,double alpha , double *v,int incx)`
  Appel : `cblas_dscal(n,alpha,v,1);`

Code

```
1 void vscale(int n, double *v, double
      alpha)
2 {
3   for (int i=0;i<n;i++)
4     v[i]=alpha*v[i];
5 }
```

Produit scalaire (xDOT)

- $s \leftarrow \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$
- Fonction BLAS de Niveau 1 :
  `double cblas_ddot(int n,double *x, int incx,double *y,int incy);`
  Appel :
  `double s=cblas_ddot(n,x,1,y,1);`

Code

```
1 double vdot(int n , double *x,double
      *y)
2 {
3   double res=0;
4   for (int i=0;i<n;i++)
5     res+=x[i]*y[i];
6   return res;
7 }
```

Exercice 3 : xAXPY

Code

```
1 void vaxpy(int n ,double alpha,
      double *x, double *y)
2 {
3
4
5
6
7
8
9
10 }
```

Exercice

- Compléter la fonction xAXPY à gauche.
- On supose `n` déclaré et les vecteurs `x` et `y` initialisés.
- Montrer que cette fonction permet d'effectuer des sommes, soustractions et multiplication par un scalaire :
  - Somme $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$:
  - Soustraction $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y} - \mathbf{x}$:
  - Mult. scalaire $\mathbf{y} \leftarrow \alpha\mathbf{x}$:

Fonction BLAS de Niveau 1 :

```
void cblas_daxpy(int n,double alpha
```


Opérations matrice/vecteur

Mise à jour de rang 1 (xGER)

$$\mathbf{A} \leftarrow \alpha\mathbf{x}\mathbf{y}^\top + \mathbf{A}$$

- Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Complexité : $T(n) = O(mn), \quad S(n) = O(mn)$
- Cas particulier : $\mathbf{A}$ symétrique et $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (xSYR).

Produit matrice vecteur généralisé (xGEMV)

$$\mathbf{y} \leftarrow \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

- Avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Complexité :
- Cas particuliers :
  - $\mathbf{A}$ symétrique (xSYMV).
  - $\mathbf{A}$ bande (xSBMV).
  - $\mathbf{A}$ triangulaire (xSTRMV).

Mise à jour de rang 1 (xGER)

Implémentation

$$\mathbf{A} \leftarrow \alpha\mathbf{x}\mathbf{y}^\top + \mathbf{A}$$

- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Fonction BLAS de Niveau 1 :

```
void cblas_dger( CBLAS_ORDER order,
 int m, int n, double alpha, double
 *x, int incx, double *y, int incy,
 double *A, int lda);
```

Appel :

```
cblas_dger(CblasRowMajor,m,n,alpha,
x,1,y,1,&A[0][0],n);
```

Code

```
1 void mger(int m, int n, double alpha
      , double **A, double *x, double
      * y)
2 {
3   for (int i=0;i<m;i++)
4       for (int j=0;j<n;j++)
5         A[i][j]+=alpha*x[i]*y[j];
6 }
```


Exercice 4 : Produit généralisé (xGEMV)

Code

```
1 void mgemv(int m, int n, double
      alpha, double **A, double *x
      , double beta, double * y)
2 {
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13 }
```

Exercice

$$\mathbf{y} \leftarrow \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Compléter la fonction xGEMV à gauche.
- Fonction BLAS de Niveau 1 :

```
void cblas_dgemv(CBLAS_ORDER order,
CBLAS_TRANSPOSE TransA, int m, int n,
double alpha, double *A, int lda,
double *x, int incx, double beta,
double *y, int incy);
```

Appel :

```
cblas_dgemv(CblasRowMajor,CblasNoTrans
,m,n,alpha,&A[0][0],n,x,1,beta,y,1);
```

Opération matricielle généralisée (xGEMM)

Opération

$$\mathbf{C} \leftarrow \alpha\mathbf{AB} + \beta\mathbf{C}$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$
- Complexité : $T(n) = O(mnp), \quad S(n) = O(mn)$

Cas particuliers

- $\mathbf{A}$ symétrique (xSYMM)
- $\mathbf{A}$ hermitienne (xHEMM)
- $\mathbf{A}$ triangulaire (xTRMM)
- $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$ (xSYRK)
- $\mathbf{C} \leftarrow \alpha\mathbf{AB}^\top + \bar{\alpha}\mathbf{BA}^\top + \beta\mathbf{C}$ (mise à jour symétrique xSYRK2)

Opération matricielle généralisée (xGEMM)

Implémentation

$$\mathbf{C} \leftarrow \alpha\mathbf{AB} + \beta\mathbf{C}$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$
- Fonction BLAS de Niveau 1 :

```
void cblas_dgemm(CBLAS_ORDER Order,
CBLAS_TRANSPOSE TransA,
CBLAS_TRANSPOSE TransB, int m, int
n, int p, double alpha, double *A,
int lda, double *B, int ldb, double
 beta, double *C, int ldc);
```

Appel :

```
cblas_dgemm(CblasRowMajor,
CblasNoTrans,CblasNoTrans,m,n,p,
alpha,&A[0][0],p,&B[0][0],n,beta,&C
[0][0],n);
```

Code

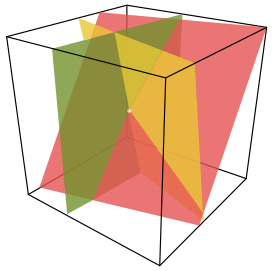
```
1  void mgemm(int m, int n, int p,
       double alpha, double **A, double
        **B, double beta, double **C)
2  {
3    for (int i=0;i<m;i++)
4    for (int j=0;j<n;j++)
5    {
6      C[i][j]=beta*C[i][j];
7      for (int k=0;k<p;k++)
8        C[i][j]+=alpha*A[i][k]*B[k][j];
9    }
10 }
```


Système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- On cherche le vecteur $\mathbf{x}$ de taille n satisfaisant les m équations ci dessus.
- L'ensemble des solutions dépend des propriétés de la matrice $\mathbf{A}$.
- La résolution du système peut être particulièrement simple dans certains cas particuliers ($\mathbf{A}$ diagonale, triangulaire).



Solutions des systèmes d'équations linéaires

Existence et unicité des solutions

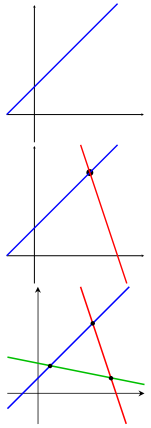
Dépend de m, n et du rang de $\mathbf{A}$:

- $m < n$, il existe une infinité de solution.
- $\mathbf{A}$ de rang $< n$ il existe une infinité de solution.
- $m = n$ et $\mathbf{A}$ de rang n, il existe une solution unique
- $\mathbf{A}$ de rang $> n$, il n'existe pas de solution
  $\rightarrow$ solution des moindres carrés.

Résolution du système

- Cas particulier où $m = n$ et $\mathbf{A}$ de rang n
- Solution unique :
$$\mathbf{x}^\star = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$
- Éviter l'inversion matricielle directe dès que possible (matrices particulières).

Exemple $n = 3$



LAPACK (Linear Algebra PACKage)

Description

- LAPACK est une bibliothèque Fortran qui fournit des fonctions de haut niveau en algèbre linéaire.
- Bibliothèque d'accompagnement de BLAS utilisant les routines BLAS le plus possible.
- Interface C officielle : LAPACKE.

L	A	P	A	C	K
L	-A	P	-A	C	-K
L	A	P	A	-C	-K
L	-A	P	-A	-C	K
L	A	-P	-A	C	K
L	-A	-P	A	C	-K

Fonctions proposées (Niveau 3)

- Résolution de systèmes linéaires (cas général).
- Estimation des moindres carrés.
- Factorisation de matrice (EIG, SVD, LU, QR).

LAPACK et interface C

Convention de nommage

- Nom des fonctions LAPACK : `XMMAAA`
  - **X** type de données (même que pour BLAS).
  - **MM** type de matrice (`GE` générale, `GB` bande, `SY` symétrique, `TR` triangulaire, `DI` diagonale ...
  - **AAA** opération de taille 2-3 caractères.
- Type d'opérations `AAA` supportées :
  - Résolution de systèmes linéaires (`SV`).
  - Moindres carrés (`LS`).
  - Décomposition en valeurs/vecteurs propres EIG (`TRD`).
  - Décomposition LU (`TRF`).
  - Décomposition en valeur singulière SVD (`BRD`).

LAPACKE

- Bibliothèque officielle d'interface C.
- Nom des fonctions : `LAPACKE_xmmaa`.
- Les tableaux définis dans le cours sont de type : `LAPACK_ROW_MAJOR`

Matrice $\mathbf{A}$ diagonale

Résolution du système

- n équations indépendantes de la forme
$$a_{k,k}x_k = b_k$$
- Solutions évidentes de la forme
$$x_k = \frac{b_k}{a_{k,k}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Si $a_{i,i} = 0$ et $b_i \neq 0$ le système n'admet pas de solution.
- Si $a_{i,i} = 0$ et $b_i = 0$ le système admet une infinité de solutions.

Code

```
1 void diagsv(int n,double **A,double
      *b,double *x)
2 {
3   for (int i=0;i<n;i++)
4     x[i]=b[i]/A[i][i];
5 }
```

Discussion

- Complexité $T(n)$:
- Complexité $S(n)$:

Matrice triangulaire

Résolution du système

- Soit $\mathbf{A} = \mathbf{L}$ une matrice triangulaire inférieure.
- Le système linéaire peut être résolu composante par composante :

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - l_{2,1}x_1}{l_{2,2}}$$
$$x_k = \frac{b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{k,i}x_i}{l_{k,k}}$$

Exercice 5 :

Trouver la solution $\mathbf{x}$ pour le système suivant

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Matrice

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

Système

$$\begin{aligned} l_{1,1}x_1 &= b_1 \\ l_{2,1}x_1 + l_{2,2}x_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ l_{k,1}x_1 + \cdots + l_{k,k}x_k &= b_k \end{aligned}$$

Solution

$$\mathbf{x} =$$

Exercice 6 : Résolution de système triangulaire

Code

```
1  void triinfsv(int n,double **L,
       double *b,double *x)
2  {
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13 }
```

Exercice

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

avec $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure.

- Compléter la fonction `triinfsv` à gauche.
- Complexité $T(n)$: $O(n^2)$
- Complexité $S(n)$: $O(n^2)$
- Serait-il possible de coder une résolution plus efficace en mémoire qui utilise $\mathbf{b}$ pour écrire la solution ?

Matrice A générale : Pivot de Gauss

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

- Effectuer des combinaisons linéaires des équations ne change pas le problème.
- Le pivot de Gauss vise à utiliser des sommes pondérées des équations pour faire disparaître les variables une à une.
- A la fin, on trouve un système linéaire triangulaire simple à résoudre ($O(n^2)$) .
- Première étape (colonne 1) : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}L_1$, ..., $L_m \leftarrow L_m - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}}L_1$

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ 0 + (a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}})x_2 + ... + (a_{2,n} - \frac{a_{2,1}a_{1,n}}{a_{1,1}})x_n &= b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1 \\ 0 + (a_{m,2} - \frac{a_{m,1}a_{1,2}}{a_{1,1}})x_2 + ... + (a_{m,n} - \frac{a_{m,1}a_{1,n}}{a_{1,1}})x_n &= b_m - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}}b_1 \end{aligned}$$

Exemple pivot de Gauss

Résolution

- $n = 3$.

Système linéaire

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 && (L_1) \\ -3x - y + 2z &= -11 && (L_2) \\ -2x + y + 2z &= -3 && (L_3) \end{aligned}$$

Matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

Itération 1

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 && (L_1) \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 1 && (L_2) \\ 2y + z &= 5 && (L_3) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Itération 2

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 && (L_1) \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 1 && (L_2) \\ -z &= 1 && (L_3) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice est maintenant sous forme triangulaire.

Pivot de Gauss en C

Implémentation simplifiée

$$\mathbf{A}, \mathbf{b} \leftarrow \text{pivot}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- Complexité $T(n)$:
- Pour résoudre le système linéaire :
  1. $\mathbf{A}, \mathbf{b} \leftarrow \text{pivot}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$
  2. $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$: inversion de matrice triangulaire.
- Résolution en C :

```
1  pivot(n,A,b);
2  trisupsv(n,A,b,x);
```

Code

```
1  void pivot(int n, double **A, double
       *b)
2  {
3    for (int k=0;k<n-1;k++)
4    { // k : colonne a mettre en
         echelon
5      for (int i=k+1;i<n;i++)
6        { // i : ligne mise a jour
7          for (int j=k+1;j<n;j++)
8            A[i][j]-=A[k][j]*A[i][k]/A[
                 k][k];
9          // maj vec b
10         b[i]-=A[i][k]*b[k]/A[k][k];
11         A[i][k]=0;// pivot mis a 0
12       }
13   }
14 }
```

Erreur numérique et implémentation

Erreur numérique et permutation

- La méthode précédente traite les données lignes par lignes.
- Attention à la propagation de l'erreur pour des flottants !
- Erreur amplifiée lorsque le pivot est petit (division par le pivot).
- En pratique on permute les lignes le long des itérations pour prendre le pivot ayant la valeur absolue maximum (Lapack retourne la permutation).

Implémentation Lapack

- Lapack implémente la résolution de système générale à l'aide d'une factorisation LU (variante du pivot de Gauss).
- Fonction Lapack

```
int LAPACKE_dgesv( int matrix_order, int n, int nrhs, double*A, int lda,
int*ipiv, double*b, int ldb );
```

  - `nrhs` nb. col de $\mathbf{b}$.
  - `ipiv` permutations de lignes.

  Appel :

```
LAPACKE_dgesv(LAPACK_ROW_MAJOR,n 1, &A[0][0],n,ipi, b,1);
```


Linpack et HPLinpack

- La résolution de système linéaire par pivot de Gauss a une complexité $O(n^3)$.
- Algorithme utilisé dans les systèmes de $\ll$ benchmark $\gg$ Linpack et HPLinpack pour estimer la puissance de calcul des gros centres de calculs dans le monde.
- Un classement des centres de calculs mondiaux est disponible sur le site : `http://www.top500.org/`

Ordres de grandeur (Juin 2015)

Machine	Flops
PC perso, Intel Core i7	3.10^9
Station de travail, Intel Xeon 12 coeurs	10.10^9
Station de travail, NVIDIA Titan X (Cuda)	2.10^{12}
Centre de calcul de l'université de Nice	35.10^{12}
Total Exploration Production, France (rang 36)	2.10^{15}
National Super Computer Center in Guangzhou, China (rang 1)	33.10^{15}
Cerveau humain (simulation temps réel)	37.10^{15}

Rappels : 10^9 (Giga), 10^{12} (Tera), 10^{15} (Peta)

Applications du pivot de Gauss

Calcul de déterminant

- Le déterminant de $\mathbf{A}$ est égale au déterminant de la matrice triangulaire (multiplication de ses éléments diagonaux).
- Règles pour le calcul du déterminant :
  - Multiplier une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par un scalaire.
  - Permuter deux lignes multiplie le déterminant par -1.
  - Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

Calcul de l'inverse d'une matrice

- On utilise une matrice augmentée $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ avec la matrice identité $\mathbf{I}$.
- Après triangualisation, on utilise une backsubstitution pour retrouver une matrice identité à gauche. La matrice augmentée devient $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$.

Calcul du rang d'une matrice

- Si une ligne nulle apparaît le long des itérations, la matrice n'est pas inversible ($\text{rank}(\mathbf{A}) < n$).
- Le rang de la matrice est le nombre de lignes non-nulles.

Factorisation de matrice

Principe

- On cherche à représenter $\mathbf{A}$ comme une multiplication de plusieurs matrices plus simples (triangulaires).
- Permet de résoudre de multiples systèmes linéaires plus efficacement.
- Meilleur interprétation des propriétés de $\mathbf{A}$.

Factorisations classiques

LU $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, où $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure et $\mathbf{U}$ triangulaire supérieure.

Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^\top$, pour $\mathbf{A}$ symétrique définie positive.

QR $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, avec $\mathbf{Q}$ orthogonale et $\mathbf{R}$ triangulaire supérieure.

Vec. propres $\mathbf{A} = \mathbf{VDV}^\top$, où $\mathbf{V}$ orthonormale (vec. propres) et $\mathbf{D}$ diagonale (val. propres).

SVD $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$, où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ orthonormales et $\mathbf{D}$ diagonale.

Factorisation LU

Principe

$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tri. inf. et $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tri. sup.

- Méthode proposée et étudiée par Alan Turing en 1948.
- Théorème d'existence : Si $\mathbf{A}$ est non singulière, il existe une décomposition $\mathbf{LU}$.
- Une généralisation permet d'utiliser une permutation des lignes : $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$
- On applique le pivot de Gauss sur ma matrice augmentée $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ pour trouver une matrice triangulaire supérieure $[\mathbf{U}|\cdot]$.
- Complexité $T(n) = \frac{2n^3}{3}$.

Résolution de systèmes linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$, soit deux systèmes linéaires triangulaires.

Implémentation Lapack : DGETRF

- Appel en C :

```
int LAPACKE_dgetrf( int matrix_order, int m, int n, double*A, int lda, int
*ipiv );
```

- Utilisé pour la résolution de systèmes linéaires généralisés avec DGESV.

Factorisation de Cholesky

Principe

$\mathbf{A} = \mathbf{LL}^\top$, avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$sym def. pos., $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tri. inf.

- Méthode proposée en 1924 par André-Louis Cholesky.
- Matrices carrées définies positives mais généralisée aux matrices complexes avec le transposé conjugué.
- Expression alt. : $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top$ avec $\mathbf{D}$ diagonale et $\mathbf{L}$ unitaire.
- Complexité $T(n) = \frac{n^3}{3}$ ($O(n^3)$ mais 2× plus efficace que LU).

Résolution de systèmes linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{L}(\mathbf{L}^\top\mathbf{x}) = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{L}^\top\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $\mathbf{x} = \mathbf{L}^{\top-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$, soit deux systèmes linéaires triangulaires.

Implémentation Lapack : DPPTRF

- Appel en C :

```
int LAPACKE_dpptrf( int matrix_order, char uplo, int n, double*ap );
```

- Utilisé pour la résolution de systèmes linéaire généralisés avec DPPTRS.

Factorisation QR

Principe

$\mathbf{A} = \mathbf{QR}^\top$, avec $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$orthonormale, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tri. sup.

- Découverte indépendemment par John G. F. Francis en 1959, et Vera Kublanovskaya en 1961.
- Si $\mathbf{A}$ inversible alors factorisation unique.
- Factorisation d'une matrice rectangulaire avec $m > n$, alors les dernières lignes de $\mathbf{R}$ sont nulles.
- Permet d'estimer le déterminant de $\mathbf{A}$ à partir du déterminant de $\mathbf{R}$.
- Complexité (Householder) $T(n) = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n - 2 = O(n^3)$.

Résolution de systèmes linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{Q}(\mathbf{Rx}) = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Rx} = \mathbf{y}$
- $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\top\mathbf{b}$, soit une multiplication et un système linéaire triangulaire.

Implémentation Lapack : DGEQRF

- Appel en C :

```
int LAPACKE_dgeqrf( int matrix_order, int m, int n, double*a, int lda,
double*tau );
```


Factorisation SVD

Principe de la décomposition en valeurs singulières

$\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ othonormales, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diag.

- $\mathbf{A}$ peut être une matrice quelconque $m \neq n$.
- $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ avec $r = min(m, n)$ contient les valeurs singulières.
- Calculée en effectuant plusieurs itérations de factorisation QR.
- Complexité $T(n) = km^2n + k'n^3 = O(n^3 + m^2n)$ avec $k = 4$ et $k' = 22$.

Approximation faible rang de la matrice $\mathbf{A}$

La meilleur approximation de rang $k < r$ de la matrice $\mathbf{A}$ obtenue par

$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{V}^\top$ où $\widetilde{\mathbf{D}} = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$ (mise à 0 des σ_i après k)

Implémentation Lapack : DGESVD

- Appel en C :

```
int LAPACKE_dgesvd( int matrix_order, char jobu, char jobvt,int m, int n,
double*a, int lda, double*s, double*u, int ldu, double*vt, int ldvt,
double*superb );
```

Ressources bibliographiques I

- Rappels algèbre linéaire [3].
- Référence complète sur les matrices [2].
- Implémentation en C [4].
- Doc BLAS/LAPACK [1].

[1] "Reference manual for intel® math kernel library - c," https://software.intel.com/en-us/mkl-reference-manual-for-c, version du 2015-11-16.

[2] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*. JHU Press, 2012, vol. 3.

[3] J. Grifone, *Algebre linéaire*. Cepadues-Editions, 1990.

[4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipies in C*. Cambridge university press Cambridge, UK, 1992.