Rappels de probabilité

R. Flamary, R. Herault, A. Rakotomamonjy

9 octobre 2014

Plan du cours

Définition de la probabilité

Espace des épreuves Ω
Ensemble de tous les évènements possibles issus d'une expérience donnée.

Définition de $P(A)$
Soit A un ensemble d'évènements inclus dans Ω,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} \quad \text{si la limite existe,}$$

avec
- n le nombre d'expériences réalisées,
- $n(A)$ le nombre d'expériences où A s'est réalisé.

Exemple, dé à 6 faces
- $\Omega = \{\text{faces } : 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Si dé non pipé, alors $P(k) = 1/6, \quad \forall k \in 1, \ldots, 6$

Axiomes des probabilités

Premier axiome
Si $A \in \Omega$ alors

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Deuxième axiome

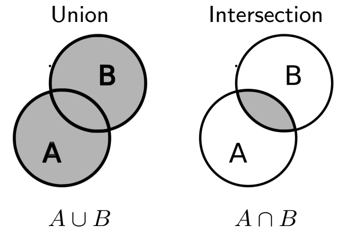
$$P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

avec $\emptyset$ l'ensemble vide

Union et intersection
Si $A \in \Omega, \ B \in \Omega$, alors

$$P(A \cup B) \quad = \quad P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

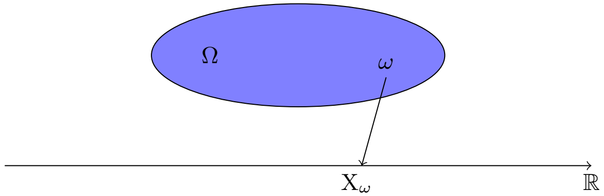
Si $A \cap B = \emptyset$ alors
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



Définitions

Variable Aléatoire

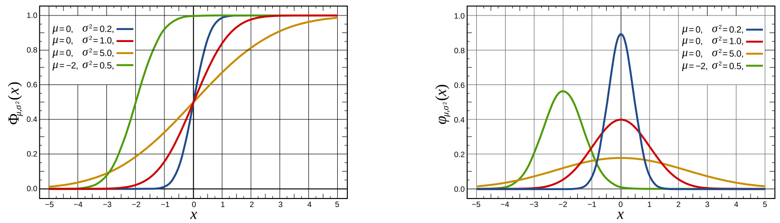
C'est un nombre (réel) X_ω dont la valeur est déterminée par le résultat ω d'une expérience aléatoire.



Exemple : dé à 6 faces

- L'évènement aléatoire (`e.a.`) est l'apparation d'une face.
- On associe un entier 1 à 6 à chaque face.

Fonction de répartition et dérivé



Fonction de répartition

La fonction de répartition $F_{\mathrm{X}}(x)$ d'une `v.a.`X est définie comme étant la probabilité que la `v.a.`X soit inférieur ou égale à x,

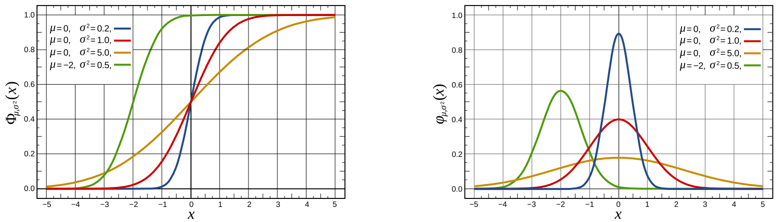
$$F_{\mathrm{X}}(x) = P(\mathrm{X} \leq x) \quad .$$

Densité de probabilité (`d.d.p.`)

Elle est définie comme la dérivée de la fonction de répartition,

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad .$$

Propriétés



Propriétés de la fonction de répartition

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathrm{X}}(-\infty) = 0 & & F_{\mathrm{X}}(\infty) = 1 \\ 0 \leq & F_{\mathrm{X}}(x) & \leq 1 \\ P(x_1 \leq x \leq x_2) & = & F_{\mathrm{X}}(x_2) - F_{\mathrm{X}}(x_1) \end{array}$$

Propriétés de la densité de probabilité

$$p(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$P(x \leq x_1) = F_{\mathrm{X}}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx \qquad P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

Moments d'une `v.a.`(1)

Définition du moment

Le moment $g(x)$ d'une `v.a.`est donné par l'espérance,

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

Généralement $g(x) = x^m$, on parle alors de moment d'ordre m,

$$\text{Moment d'ordre 1} \qquad m_X = E(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$\text{Moment d'ordre 2} \quad m_X^{(2)} = E(\mathrm{X}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx$$

Le moment d'ordre 1 est aussi souvent appelé moyenne.

Propriété le linéarité de l'espérance

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y), \qquad E(kX) = kE(X)$$

Pour k une constante.

Moments d'une `v.a.`(2)

Définition de la variance

La variance est l'espérance du carré des écarts par rapport à la valeur moyenne $m = E(\mathrm{X})$,

$$\sigma_X^2 = E\left((\mathrm{X} - m_X)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 p(x) dx \ ,$$
$$\sigma_X^2 = E\left(\mathrm{X}^2\right) - E\left(\mathrm{X}\right)^2 \ .$$

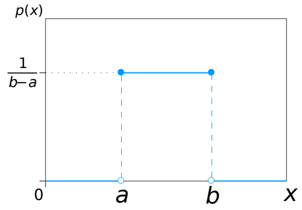
On utilise souvent aussi la notion d'écart-type σ,

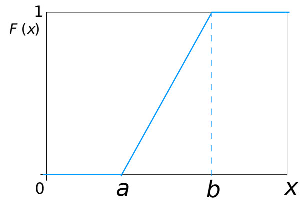
$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \ .$$

Caractérisation incomplète

On caractérise, de manière incomplète, une `v.a.`par sa moyenne et sa variance.

Exemples de lois (1)





Loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$

- Densité de probabilité

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \ , \\ 0 & \text{ailleurs} \ . \end{cases}$$

- Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \ , \\ 1 & x > b \ . \end{cases}$$

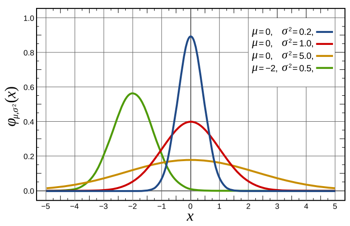
- Espérance :

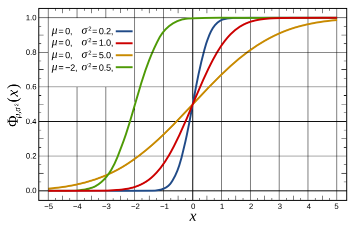
$$m_X = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

- Variance :

$$Var(X) = E((X - m_X)^2) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Exemples de lois (2)





Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Densité de probabilité

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

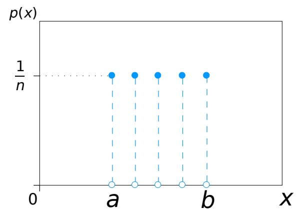
- Espérance :

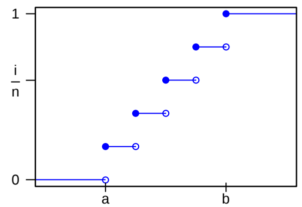
$$m_X = E(X) = \mu$$

- Variance :

$$Var(X) = E((X - m_X)^2) = \sigma^2$$

Exemples de lois (3)





Loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$

- $P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i \in 1, \ldots, n$
- x_i valeurs réelles.
- Densité de probabilité

$$p(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i)$$

- Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x \geq x_i}$$

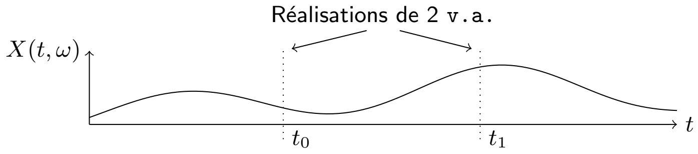
- Espérance :

$$m_X = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

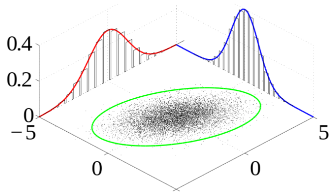
- Variance :

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2$$

Système de v.a.



- On est souvent amené à considérer un ensemble de v.a. dans la mesure où à chaque instant t_i est associé une v.a..
- Modélisation jointe de ces variables.



- Lorsque l'on a plusieurs v.a. $X_1, X_2, \dots, X_d$ il est intéressant de modéliser ces v.a. par un vecteur aléatoire $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$

Densité de probabilité jointe

Fonction de répartition mutuelle

Soit X et Y deux v.a. alors,

$$F(x,y) = P(\mathrm{X} \leq x, \mathrm{Y} \leq y)$$

Propriétés

$$0 \leq F(x,y) \leq 1$$
$$F(-\infty,-\infty) = 0$$
$$F(\infty,\infty) = 1$$

Densité de probabilité jointe

Soit X et Y deux v.a. alors,

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \\ p(x) &= \int p(x,y)dy \\ p(y) &= \int p(x,y)dx \end{aligned}$$

$p(x)$ et $p(y)$ sont appelées lois marginales.

Propriétés

$$p(x,y) \geq 0$$
$$\int\int p(x,y)dxdy = 1$$

$$\begin{aligned} p(A,B) &= P(x \in A, y \in B) \\ &= \int_A \int_B p(x,y)dxdy \end{aligned}$$

Densité de probabilité jointe

Probabilité conditionnelle

- Loi jointe $p(x,y)$.
- Probabilité d'une des variable sachant la valeur de la seconde.
- Notation : $p(x|y)$.

Théorème de Bayes

$$\begin{aligned} p(x|y) &= \frac{p(x,y)}{p(y)} \\ p(y|x) &= \frac{p(x,y)}{p(x)} \\ p(x,y) &= p(y|x)p(x) = p(x|y)p(y) \end{aligned}$$

Covariance et corrélation

Pour caractériser l'interdépendance de deux variables, on introduit la notion de covariance.

Définitions

- Moments d'une loi jointe

$$E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\ p(x,y)dxdy$$

- Corrélation

$$R_{\mathrm{XY}} = E(\mathrm{XY}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\ p(x,y)dxdy$$

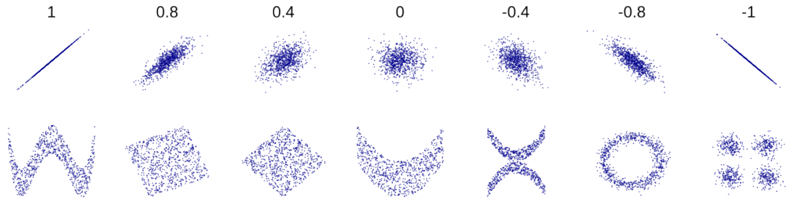
- Covariance

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{XY}} &= \sigma_{\mathrm{XY}} = E\left((\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}})(\mathrm{Y}-m_{\mathrm{Y}})\right) \\ C_{\mathrm{XY}} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_{\mathrm{X}})(y-m_{\mathrm{Y}})\ p(x,y)dxdy \end{aligned}$$

- Coefficient de corrélation

$$r_{\mathrm{XY}} = \frac{C_{\mathrm{XY}}}{\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}}}$$

Indépendance et corrélation



Covariance et Corrélation

$$R_{\mathrm{XY}} = E(\mathrm{XY}) = C_{\mathrm{XY}} + m_{\mathrm{X}} m_{\mathrm{Y}}$$

Indépendance

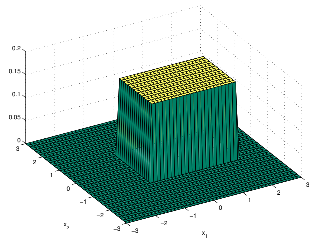
- Deux v.a. X et Y sont indépendantes si

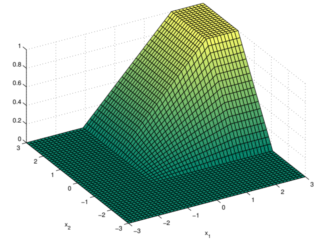
$$p(x,y) = p(x)p(y)$$

- Si les variables sont indépendantes alors

$$R_{\mathrm{XY}} = m_{\mathrm{X}} m_{\mathrm{Y}} \qquad \text{et} \qquad C_{XY} = 0.$$

Exemples de système de v.a. (1)





Loi uniforme multivariée

- $X \sim U(a_x, b_x)$ et $Y \sim U(a_y, b_y)$
- $\mathbf{X} = [X, Y]^\top$
- Densité de probabilité

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S} & \text{si } x \in [a_x, b_x], \\ & \text{et } y \in [a_y, b_y] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

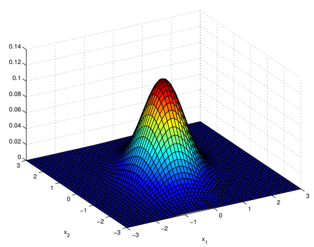
- Surface $S = (b_x - a_x)(b_y - a_y)$
- Espérance :

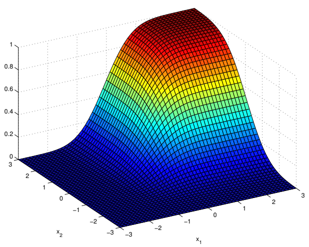
$$\mathbf{m}_X = E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{b_x + a_x}{2} \\ \frac{b_y + a_y}{2} \end{bmatrix}$$

- Covariance :

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{X}) &= E((\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^\top) \\ &= \begin{bmatrix} Var(X) & 0 \\ 0 & Var(Y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemples de système de v.a. (2)





Loi gaussienne multivariée

- $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$
- Densité de probabilité

$$p(x,y) = K e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$$

- Coefficient $K = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}$
- Espérance :

$$\mathbf{m}_X = E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$$

- Covariance :

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{X}) &= E((\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^\top) \\ &= \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

Sources web I

- Interstice, https://interstices.info/jcms/ni_76925/le-piano-reve-des-mathematiciens
- http://www.w3.org/People/Bos/Nice/tempgraph
- http://www.manicore.com/documentation/hydro.html
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sixsided_Dice_inJapan.jpg