

Signaux Aléatoires

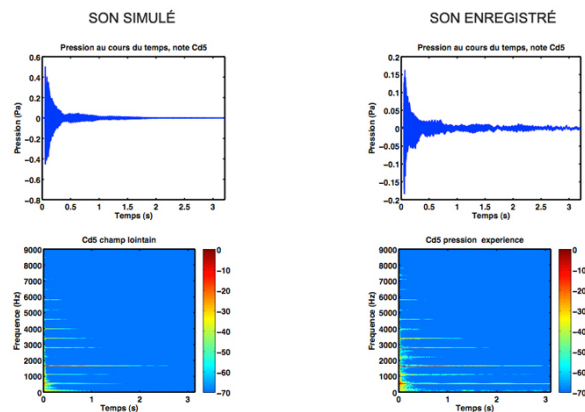
Introduction

R. Flamary, R. Herault, A. Rakotomamonjy

10 septembre 2018

Note de piano

La propagation des ondes dans un corde de piano et dans l'air est modélisé par des équations aux dérivées partielles (EDP).



Pourquoi le son simulé et le son enregistré sont différents ?

Source : Interstice, Images ©Juliette Chabassier 2012

Plan du cours

Introduction

- Motivations
- Signaux aléatoires
- Rappels sur les signaux
 - Energie et puissance
 - Notion de bruit
- Rappels de probabilité
 - Définitions
 - Moments
 - Exemples de lois
 - Système de v.a.
- Bibliographie

Signaux aléatoires

Exemples de signaux aléatoires

Propriétés spectrales des signaux stationnaires

2 / 34

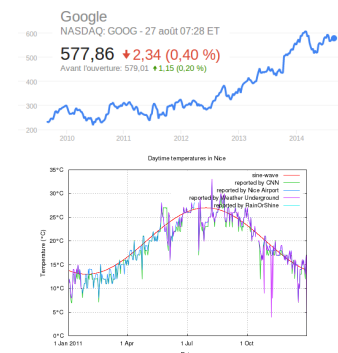
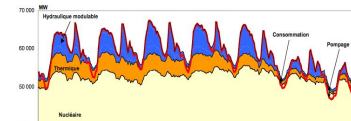
Signaux aléatoires

Motivation

- Difficulté de modéliser **exactement** des signaux physiques.
- Signaux réels sont aléatoires ou présentent une composante aléatoire.
- Prédiction exacte impossible mais **inférence** possible.

Exemples

- Cours de la bourse.
- Température maximale dans la journée.
- Consommation instantanée d'énergie.
- IP instruction pointer dans les processeurs.



Déterministe VS aléatoire

$$x(t) = f(t, \dots)$$



Déterministe

- ▶ Signal modélisé exactement par une fonction mathématique.
- ▶ Connaissance du signal à chaque instant.

Aléatoire

- ▶ Une part d'incertitude sur le signal.
- ▶ Impossibilité de prédire avec certitude le signal à l'instant t .

Approche

- ▶ Incertitude modélisée par des lois de probabilité.
- ▶ L'étude de ces lois permet un meilleur traitement des signaux.
- ▶ Maîtrise du **traitement du signal** et des **probabilités**.

5 / 34

Exemple de signal aléatoire (1)

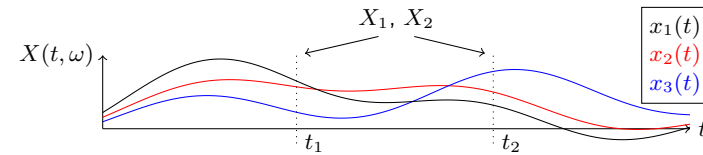
Fréquence aléatoire

$$X(t, \omega) = \cos(\omega t)$$

- ▶ $t \in \mathbb{R}$ est le temps.
- ▶ $\omega \in [0, 2\pi]$ est une variable aléatoire uniforme.
- ▶ X est une fonction de 2 variables.

Exemple de réalisation

Signal aléatoire



Définition

Un signal aléatoire temporel est une fonction de deux variables. L'un des variables prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'autre étant la réalisation d'une variable aléatoire :

$$X(\underbrace{t}_{\text{temps}}, \underbrace{w}_{\text{v.a.}}) \quad (1)$$

- ▶ À $t = t_i$ fixé, $X(t_i, w) = X_i = X_i(w)$ est une variable aléatoire ;
- ▶ Pour $w = w_i$ fixé, $X(t, w_i) = x_i(t)$ est un signal temporel ;
- ▶ Si X est à temps discret, on parle alors de *processus aléatoire*. ($n \in \mathbb{N}$ à la place de $t \in \mathbb{R}$)

6 / 34

Exemple de signal aléatoire (2)

Phase aléatoire

$$X(t, \phi) = \cos(\pi * t + \phi)$$

- ▶ $t \in \mathbb{R}$ est le temps.
- ▶ $\phi \in [0, 2\pi]$ est une variable aléatoire uniforme.
- ▶ X est une fonction de 2 variables.

Exemple de réalisation

7 / 34

9 / 34

Energie et puissance

Puissance instantanée

La puissance instantanée d'un signal $x(t)$ est

$$p_x(t) = |x(t)|^2 \quad (2)$$

Unité : Watt (W).

Énergie d'un signal

On définit l'énergie d'un signal $x(t)$ par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (3)$$

et le signal est dit d'énergie finie si $E < \infty$.

Unité : Joule, Calorie ou Wattheure (J, Cal ou Wh, 1 calorie = 4.2 J).

Exemple

Tension aux bornes d'une résistance

- ▶ $u(t)$ est la tension, $i(t)$ l'intensité et R la résistance.
- ▶ $u(t) = R.i(t)$ (loi d'Ohm).
- ▶ $u(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$ et 0 sinon, $R = 1$.

Puissance instantanée

$$p_x(t) = u(t) * i(t) = \frac{1}{R} u(t)^2 =$$

Énergie du signal

$$E = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt =$$

Puissance moyenne

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TR} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |u(t)|^2 dt =$$

Puissance moyenne

Puissance moyenne d'un signal

On définit la puissance moyenne d'un signal par

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (4)$$

- ▶ Si le signal est périodique, la puissance moyenne peut être calculée sur une période.
- ▶ La puissance est homogène à une énergie divisée par un temps.
- ▶ Notons qu'il existe aussi la valeur efficace qui est la racine carrée de la puissance moyenne.
- ▶ Un signal d'énergie finie est de puissance moyenne nulle.
- ▶ Unité : Watt (W).

11 / 34

12 / 34

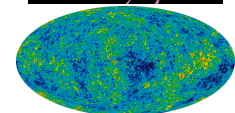
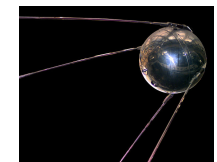
Notion de bruit

Définition

un phénomène perturbateur pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal.

Exemples

- ▶ Signaux Satellite et Astrophysique
 - ▶ Télécom : Signal satellite est signal, astro est le bruit
 - ▶ Astrophysique : Satellite est le bruit, astro est le signal
- ▶ Réseau EDF, pic à 50Hz quand on fait des mesures de tension.



Bruit additif

Le bruit additif est un bruit qui vient se rajouter à un signal.

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

$y(t)$ est le signal observé, $x(t)$ le signal qui nous intéresse et $b(t)$ le signal de bruit.

13 / 34

14 / 34

Rapport signal sur bruit (RSB)

Définition

Le rapport signal sur bruit est défini par :

$$R_{S/B} = \frac{P_S}{P_B} \quad \text{ou} \quad R_{S/B}(dB) = 10 \log_{10}(R_{S/B}) \quad (5)$$

avec P_S la puissance du signal et P_B la puissance du bruit

- Un processus d'acquisition doit avoir le meilleur RSB possible.
- Le RSB est également appelé SNR pour Signal to Noise Ratio.
- Le Rapport signal sur signal + bruit est également utilisé.

$$R_{S/S+B} = \frac{P_S}{P_{S+B}}$$

- Un filtrage permet d'améliorer le RSB quand les signaux sont différents en terme de contenu fréquentiel.

15 / 34

Définition de la probabilité

Espace des épreuves Ω

Ensemble de tous les événements possibles issus d'une expérience donnée.

Définition de $P(A)$

Soit A un ensemble d'événements inclus dans Ω ,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} \quad \text{si la limite existe,}$$

avec

- n le nombre d'expériences réalisées,
- $n(A)$ le nombre d'expériences où A s'est réalisé.

Exemple, dé à 6 faces

- $\Omega = \{\text{faces : } 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Si dé non pipé, alors $P(k) = 1/6, \quad \forall k \in 1, \dots, 6$



16 / 34

Axiomes des probabilités

Premier axiome

Si $A \in \Omega$ alors

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Deuxième axiome

$$P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

avec $\emptyset$ l'ensemble vide

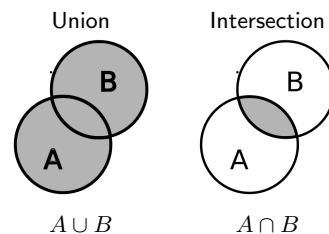
Union et intersection

Si $A \in \Omega, B \in \Omega$, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si $A \cap B = \emptyset$ alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

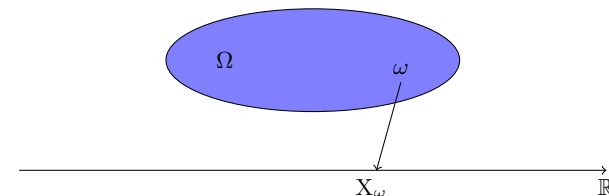


17 / 34

Définitions

Variable Aléatoire

C'est un nombre (réel) X_ω dont la valeur est déterminée par le résultat ω d'une expérience aléatoire.

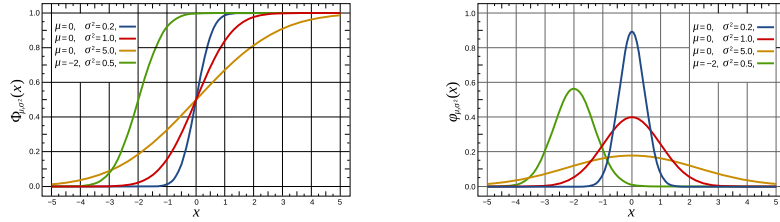


Exemple : dé à 6 faces

- L'événement aléatoire (e.a.) est l'apparition d'une face.
- On associe un entier 1 à 6 à chaque face.

18 / 34

Fonction de répartition et dérivé



Fonction de répartition

La fonction de répartition $F_X(x)$ d'une v.a. X est définie comme étant la probabilité que la v.a. X soit inférieure ou égale à x ,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad .$$

Densité de probabilité (d.d.p.)

Elle est définie comme la dérivée de la fonction de répartition,

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad .$$

Moments d'une v.a. (1)

Définition du moment

Le moment $g(x)$ d'une v.a. est donné par l'espérance,

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

Généralement $g(x) = x^m$, on parle alors de moment d'ordre m ,

$$\text{Moment d'ordre 1} \quad m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$\text{Moment d'ordre 2} \quad m_X^{(2)} = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx$$

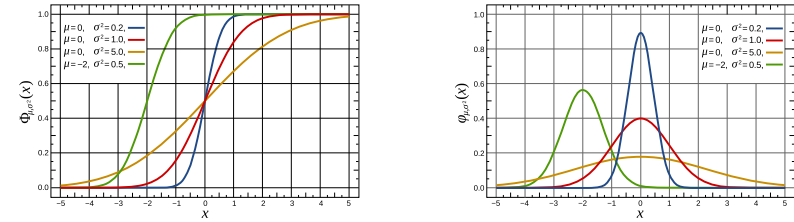
Le moment d'ordre 1 est aussi souvent appelé moyenne.

Propriété de linéarité de l'espérance

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y), \quad E(kX) = kE(X)$$

Pour k une constante.

Propriétés



Propriétés de la fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_X(-\infty) &= 0 & F_X(\infty) &= 1 \\ 0 &\leq F_X(x) &\leq 1 \\ P(x_1 \leq x \leq x_2) &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \end{aligned}$$

Propriétés de la densité de probabilité

$$\begin{aligned} p(x) &\geq 0 & \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx &= 1 \\ P(x \leq x_1) &= F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx & P(x_1 \leq x \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \end{aligned}$$

Moments d'une v.a. (2)

Définition de la variance

La variance est l'espérance du carré des écarts par rapport à la valeur moyenne $m = E(X)$,

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E((X - m_X)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 p(x)dx, \\ \sigma_X^2 &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

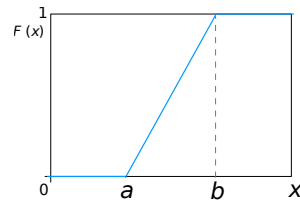
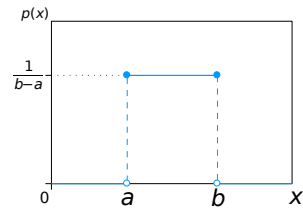
On utilise souvent aussi la notion d'écart-type σ ,

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad .$$

Caractérisation incomplète

On caractérise, de manière incomplète, une v.a. par sa moyenne et sa variance.

Exemples de lois (1)



Loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$

- Densité de probabilité

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- Espérance :

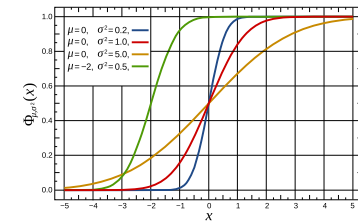
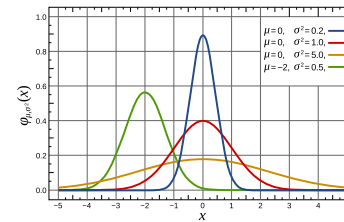
$$m_X = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

- Variance :

$$\text{Var}(X) = E((X - m_X)^2) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

23 / 34

Exemples de lois (2)



Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Densité de probabilité

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

- Espérance :

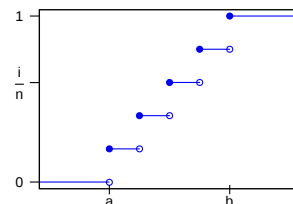
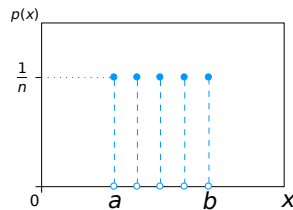
$$m_X = E(X) = \mu$$

- Variance :

$$\text{Var}(X) = E((X - m_X)^2) = \sigma^2$$

24 / 34

Exemples de lois (3)



Loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$

- $P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i \in 1, \dots, n$
- x_i valeurs réelles.

- Densité de probabilité

$$p(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i)$$

- Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x \geq x_i}$$

- Espérance :

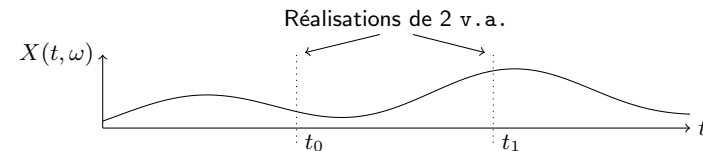
$$m_X = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Variance :

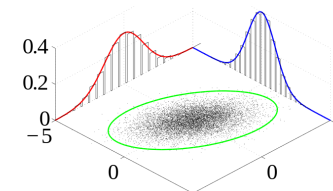
$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2$$

25 / 34

Système de v. a.



- On est souvent amené à considérer un ensemble de v. a. dans la mesure où à chaque instant t_i est associée une v. a..
- Modélisation jointe de ces variables.



- Lorsque l'on a plusieurs v. a. $X_1, X_2, \dots, X_d$ il est intéressant de modéliser ces v. a. par un vecteur aléatoire $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$

26 / 34

Densité de probabilité jointe

Fonction de répartition mutuelle

Soit X et Y deux v. a. alors,

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Propriétés

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(\infty, \infty) = 1$$

Densité de probabilité jointe

Soit X et Y deux v. a. alors,

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$p(x) = \int p(x, y) dy$$

$$p(y) = \int p(x, y) dx$$

$p(x)$ et $p(y)$ sont appelées lois marginales.

Propriétés

$$p(x, y) \geq 0$$

$$\int \int p(x, y) dx dy = 1$$

$$p(A, B) = P(x \in A, y \in B)$$

$$= \int_A \int_B p(x, y) dx dy$$

27 / 34

Covariance et corrélation

Pour caractériser l'interdépendance de deux variables, on introduit la notion de covariance.

Définitions

- Moments d'une loi jointe

$$E(g(x, y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy$$

- Corrélation

$$R_{XY} = E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p(x, y) dx dy$$

- Covariance

$$C_{XY} = \sigma_{XY} = E((X - m_X)(Y - m_Y))$$

$$C_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) p(x, y) dx dy$$

- Coefficient de corrélation

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

29 / 34

Densité de probabilité jointe

Probabilité conditionnelle

- Loi jointe $p(x, y)$.
- Probabilité d'une des variable sachant la valeur de la seconde.
- Notation : $p(x|y)$.

Théorème de Bayes

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

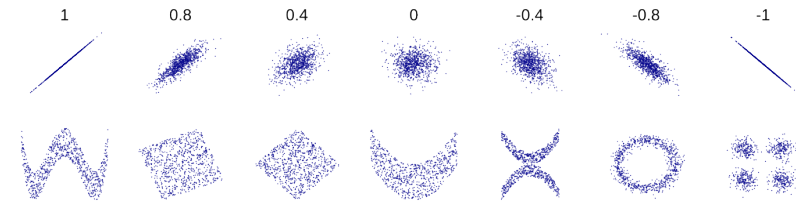
$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

$$p(x, y) = p(y|x)p(x) = p(x|y)p(y)$$



28 / 34

Indépendance et corrélation



Covariance et Corrélation

$$R_{XY} = E(XY) = C_{XY} + m_X m_Y$$

Indépendance

- Deux v. a. X et Y sont indépendantes si

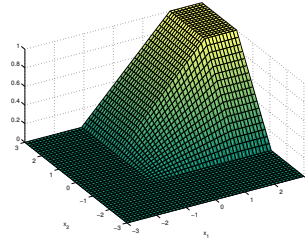
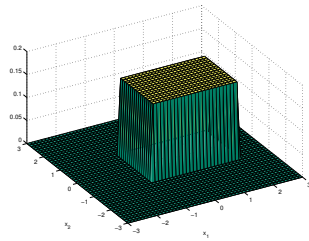
$$p(x, y) = p(x)p(y)$$

- Si les variables sont indépendantes alors

$$R_{XY} = m_X m_Y \quad \text{et} \quad C_{XY} = 0.$$

30 / 34

Exemples de système de v.a.(1)



Loi uniforme multivariée

► $X \sim U(a_x, b_x)$ et $Y \sim U(a_y, b_y)$

► $\mathbf{X} = [X, Y]^T$

► Densité de probabilité

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S} & \text{si } x \in [a_x, b_x], \\ & \text{et } y \in [a_y, b_y] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

► Surface $S = (b_x - a_x)(b_y - a_y)$

► Espérance :

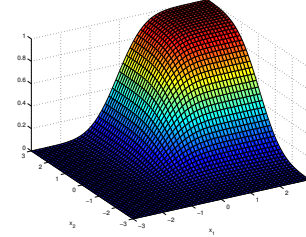
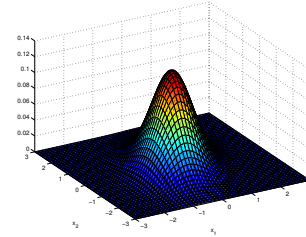
$$\mathbf{m}_X = E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{b_x + a_x}{2} \\ \frac{b_y + a_y}{2} \end{bmatrix}$$

► Covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}) &= E((\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^T) \\ &= \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & 0 \\ 0 & \text{Var}(Y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

31 / 34

Exemples de système de v.a.(2)



Loi gaussienne multivariée

► $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

► Densité de probabilité

$$p(x, y) = K e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$$

► Coefficient $K = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}$

► Espérance :

$$\mathbf{m}_X = E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$$

► Covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}) &= E((\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^T) \\ &= \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

32 / 34

Bibliographie

Cours fortement inspiré des références suivantes :

- **Traitement Statistique du Signal**, R. Herault, *INSA Rouen*.
<https://moodle.insa-rouen.fr/course/view.php?id=199>
- **Signaux Aléatoires**, J.-F. Bercher, *ESIEE*
http://www.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly_alea.pdf
- **Théorie du signal**, C. Jutten,
http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Theorie_du_signal.pdf
- **Probability, random variables and stochastic processes.**, A Papoulis

33 / 34

Sources web I

- Interstice,
https://interstices.info/jcms/ni_76925/le-piano-reve-des-mathematiciens
- <http://www.w3.org/People/Bos/Nice/tempgraph>
- <http://www.manicore.com/documentation/hydro.html>
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sixsided_Dice_inJapan.jpg

34 / 34