Signaux Aléatoires

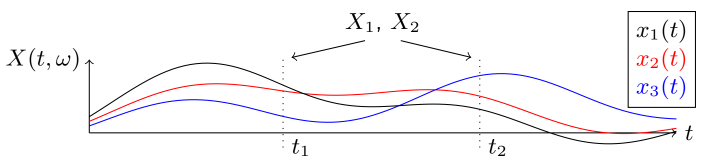
Signaux aléatoires

R. Flamary

3 septembre 2018

Plan du cours

Signal aléatoire



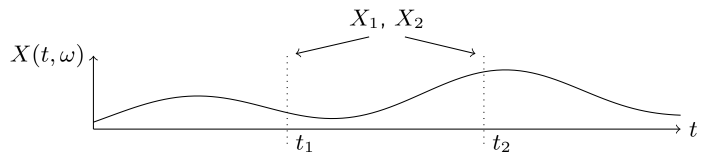
Définition

Un signal aléatoire temporel est une fonction de deux variables. L'un des variables prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'autre étant la réalisation d'une variable aléatoire :

$$X(\underbrace{t}_{\text{temps}}, \underbrace{w}_{\texttt{v.a.}}) \tag{1}$$

- À $t = t_i$ fixé, $X(t_i, w) = X_i = X_i(w)$ est une variable aléatoire ;
- Pour $w = w_i$ fixé, $X(t, w_i) = x_i(t)$ est un signal temporel ;
- Si X est à temps discret, on parle alors de *processus aléatoire*. ($n \in \mathbb{N}$ à la place de $t \in \mathbb{R}$)

Descrition d'un signal aléatoire



Description complète

Le signal aléatoire $X(t, w)$ est connu si $\forall t_1, t_2, \ldots, t_k$ et $\forall k$, on connaît la loi jointe :

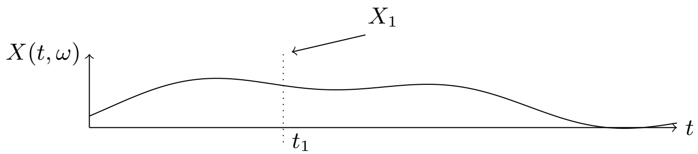
$$p_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) \tag{2}$$

où $X_1, \ldots, X_k$ sont les variables aléatoires associées aux k instants.

- Ceci suppose que l'on connaisse toutes les relation probabilistes entre tous les échantillons temporels.
- Souvent impossible en pratique.

$\Rightarrow$ Descriptions partielles

Description à un instant



Définition

On connaît $X(t,w)$ à un instant si $\forall t_1$ on connaît la loi de $X(t_1,w)$, c'est à dire de la variable aléatoire X_1 à l'instant t_1.

Moments

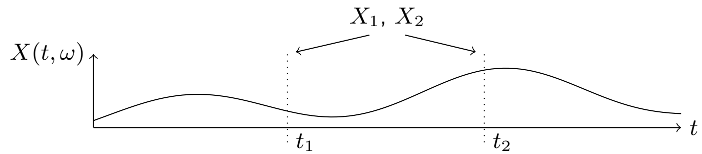
- Soit le moment d'ordre 1, c'est à dire la moyenne (l'espérance de la variable aléatoire X_1) :

$$m_X(t_1) = E(X(t_1,w)) = \int x_1 p_{X_1}(x_1) d_{x_1} \tag{3}$$

- On définit également le moment d'ordre n

$$m_X^{(n)}(t_1) = E(X(t_1,w)^n) = \int x_1^n p_{X_1}(x_1) d_{x_1} \tag{4}$$

Description à deux instants (1)



Définition

On connaît $X(t,w)$ à deux instants si $\forall t_1, t_2$ on connaît la loi conjointe des v.a. $X(t_1,w)$ et $X(t_2,w)$:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \text{ est connue } \forall t_1, t_2$$

Corrélation entre deux instants

$$R_X(t_1,t_2) = E(X(t_1,w)X^*(t_2,w)) = \int\int x_1 x_2^* p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) d_{x_1} d_{x_2} \tag{5}$$

Covariance entre deux instants

$$C_X(t_1,t_2) = E\left((X(t_1,w) - m_X(t_1))(X^*(t_2,w) - m_X(t_2))\right) \tag{6}$$

Description à deux instants (2)

Remarques

- $X_c(t,w) = X(t,w) - m_X(t)$ est le signal centré.
- Corrélation et covariance sont des caractérisations à l'ordre 2.

Indépendances entre X_1 et X_2

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \tag{7}$$

- La corrélation devient :

$$R_X(t_1,t_2) = E(X(t_1,w)X^*(t_2,w)) = E(X(t_1,w))E(X^*(t_2,w)) = m_X(t_1) * m_X(t_2)$$

- Si signal centré, alors $R_X(t_1,t_2) = 0$ pour $t_1 \neq t_2$. Ce type de signal aléatoire est appelé *bruit banc* au sens large.

Stationnarité

Définition

On dit qu'un signal aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

Stricte stationnarité

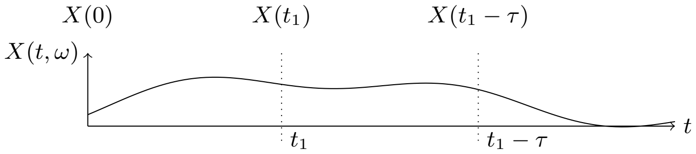
Lorsque le signal aléatoire est connu la stationnarité stricte se traduit par

$$p_{X(t_1),\dots,X(t_k)} = p_{X(t_1-\tau),\dots,X(t_k-\tau)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

- Pour alléger les notations on définit $X(t_1) = X(t_1,w) = X_1$.
- La corrélation $R_X(t_1,t_2)$ ne dépend alors plus que le l'écart $t_1 - t_2$.
- La stationnarité simplifie énormément l'étude d'un signal aléatoire.
- Stricte stationnarité difficile à vérifier en pratique.

$\Rightarrow$ Stationnarité au sens faible.

Stationnarité au sens faible (1)



Stationnarité pour la description à un instant

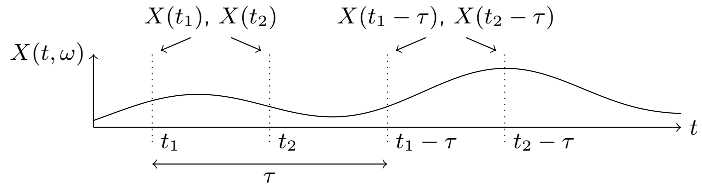
$$p_{X(t_1)} = p_{X(t_1-\tau)} = p_{X(0)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{9}$$

- Toutes les variables aléatoires $X(t)$ suivent la même loi $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Les moments

$$E(X(t_1)^n) = E(X(t_1-\tau)^n) = m_X^{(n)}(t) = m_X^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

  sont constants et indépendants du temps.
- On dit que le signal est stationnaire à l'ordre 1 si le moment d'ordre 1 est indépendant du temps.

Stationnarité au sens faible (2)



Stationnarité pour la description à deux instants

La distribution conjointe ne dépend plus que de l'écart entre les deux instants

$$p_{X(t_1),X(t_2)} = p_{X(t_1-\tau),X(t_2-\tau)} = p_{X(t_1-t_2),X(0)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{11}$$

- La corrélation devient donc

$$R_X(t1,t2) = E(X(t_1)X^*(t_2)) = E(X(t_1-t_2)X^*(0)) = E(X(t)X^*(t-\tau)) \tag{12}$$

- On définit la fonction d'autocorrélation comme

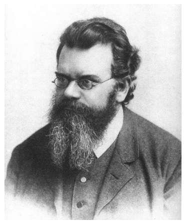
$$R_X(\tau) = E(X(t)X^*(t-\tau)) \tag{13}$$

- On dit que le signal est stationnaire à l'ordre 2 si il est stationnaire à l'ordre 1 et que la fonction de corrélation est invariante par translation temporelle.

Ergodicité

Processus ergodique

- Processus stochastique dont les statistiques peuvent être approchées par l'étude d'une seule réalisation suffisamment longue.
- Hypothèse non vérifiable en pratique, ce sera pour nous un postulat.
- Elle a été formulée par Boltzmann pour sa théorie cinétique des gaz.



Moyenne temporelle

La moyenne temporelle (ordre n) d'un signal $x(t)$ est définie par

$$\overline{x^n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{|T|} x(t)^n dt \tag{14}$$

La moyenne temporelle d'ordre 2 est la puissance du signal.

Ergodicité (2)

Moyenne temporelle d'un signal aléatoire

$$\overline{X(t,w)^n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{|T|} X(t,w)^n dt \tag{15}$$

Dans le cas général, cette moyenne est une variable aléatoire dont les réalisations sont $\overline{x_i^n}$ pour une réalisation $x_i(t)$.

Moyenne temporelle croisée

$$\overline{X(t,w)X(t-\tau,w)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{|T|} X(t,w)X(t-\tau,w) dt \tag{16}$$

Définition de l'ergodicité

Le signal $X(t,w)$ est dit ergodique si les moyennes temporelles sont des nombres certains (pas aléatoires).
Cette propriété entraîne

$$\overline{X(t,w)^n} = \overline{x_i^n} = \overline{x^n}, \forall \text{ la réalisation } w_i$$

Signaux stationnaires et ergodiques

- L'ergodicité permet de calculer une espérance mathématique en effectuant une moyenne temporelle.
- Au premier ordre, les moyennes d'ensembles et temporelles sont égales :

$$\overline{x_i^n} = E\overline{X(t,w)^n} = E(X(t,w)^n) = m_X^{(n)} \tag{17}$$

- Important en pratique car plusieurs réalisations d'un signal sont rares.
- On mesure des signaux temporels longs pour **estimer** leur moyennes, variance, covariance.
- Pour un signal stationnaire au second ordre et ergodique :

$$R_X(\tau) = E(X(t)X^*(t-\tau)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{|T|} X(t,w)X^*(t-\tau,w)dt \tag{18}$$

La corrélation du signal avec lui-même s'appelle également auto-corrélation.

Corrélation et intercorrélation

Rappels

Pour des signaux aléatoires stationnaires et ergodiques $X(t,x)$ et $Y(t,w)$.

- **Corrélation** ou **auto-corrélation**

$$R_X(\tau) = R_{XX}(\tau) = E(X(t,w)X^*(t-\tau,w)) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} X(t,w)X^*(t-\tau,w)dt \tag{19}$$

Mesure une relation linéaire entre deux instants d'un signal.

- **Inter-corrélation**

$$R_{XY}(\tau) = E(X(t,w)Y^*(t-\tau,w)) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} X(t,w)Y^*(t-\tau,w)dt \tag{20}$$

Permet de quantifier les relations linéaires existantes entre deux signaux aléatoires en fonction d'un déphasage.

- La corrélation et l'inter-corrélation ont un certain nombre de propriétés utiles pour les calculs.

Propriétés de le corrélation

$X(t,w)$ signal aléatoire stationnaire.

Parité

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \tag{21}$$

Centrage

$$R_X(\tau) = R_{X_c}(\tau) + m_X^2 \tag{22}$$

Puissance

$$P_X = R_X(0) \tag{23}$$

Par définition $R_X(0) > 0$

Non-négativité

$$\sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j R_X(\tau_i - \tau_j) \geq 0, \quad \forall i,j \tag{24}$$

Coefficient de corrélation

$$\rho(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} \tag{25}$$

Mémoire

Processus à mémoire finie :

$\exists T_{max}$ tel que $\rho(t) = 0$ pour $|t| > T_{max}$

Propriétés de l'inter-corrélation

$X(t,x)$ et $Y(t,w)$ signaux aléatoire stationnaires.

Symétrie Hermitienne

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY}^*(-\tau) \tag{26}$$

Maximum

On peut utiliser l'inégalité de Schwartz pour montrer que

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0) * R_{YY}(0) \tag{27}$$

et donc

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \tag{28}$$

L'auto-corrélation est maximale en 0