Signaux Aléatoires

Exemples de signaux aléatoires

R. Flamary

3 septembre 2018

Plan du cours

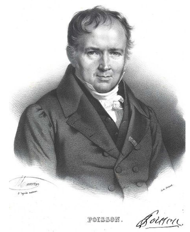
Séries usuelles

- Série Géométrique
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pour } |x| < 1$$
- Exponentielle
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \forall x$$
- Trigonométriques
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \forall x$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \forall x$$
- Hyperboliques
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \text{for all } x$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \text{for all } x$$

Loi de Poisson

Rappel loi de Poisson

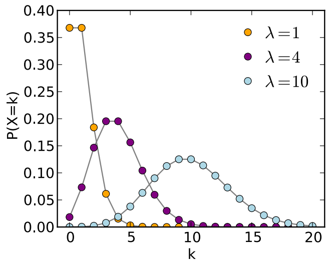
- Loi de probabilité discrète.
- Modélise un nombre d'occurrences d'un évènement dans un intervalle de temps.
- Paramètre λ correspond au nombre moyen d'occurrences dans un intervalle de temps donné.
- Si λ_0 est une moyenne d'évènements par unité de temps alors, pour un intervalle de temps Δt, $\lambda = \lambda_0 \Delta t$.

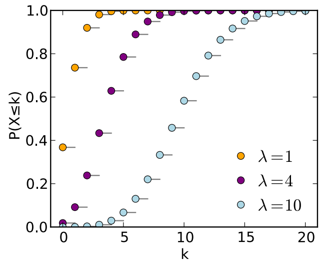


Exemples d'utilisation de la loi de poisson

- Electronique : modélise les apparitions de pannes dans les circuits électroniques
- Simulation de file d'attente : modéliser les apparitions de clients aux caisse ainsi que le temps mis pour traiter les clients.
- Astronomie : modélise le nombre de photons sur les capteurs CCD lorsque la lumière est très faible.

Loi de poisson





Propriétés

- Fonction de masse

$$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- Espérance :

$$m_X = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$=$$

- Variance :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$=$$

Processus de Poisson

Accumulation entre deux instants

- Soit $N(t, t')$ le nombre de points t_i apparaissant sur l'intervalle $\Delta t = t' - t$.
- $N(\cdot)$ est un v.a. de poisson de paramètre $\lambda \Delta t$ de probabilité

$$P(n(t, t') = k) = \frac{e^{-\lambda \Delta t}(\lambda \Delta t)^k}{k!} \qquad (1)$$

- Si les intervalles $[t, t']$ et $[u, u']$ sont disjoints alors les v.a. $N(t, t')$ et $N(u, u')$ sont indépendantes.

Processus de Poisson

Un processus de poisson est un signal aléatoire définit par :

$$X_p(t) = N(0, t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad (2)$$

- Processus de comptage d'évènements.
- Les évènements sont définis par leur instant d'apparition t_i

Propriétés du processus de Poisson

Moyenne $m_{X_p}(t)$

$$m_{X_p}(t) = E(X_p(t)) = E(N(0, t)) = \qquad (3)$$

-

Variance $Var(X_p(t))$

$$Var(X_p(t)) = E((X_p(t) - m_{X_p}(t))^2) = \qquad (4)$$

Autocorrélation $R_{X_p}(t_1, t_2)$ pour $t_1 \leq t_2$

$$R_{X_p}(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

Démonstration de l'autocorrélation $R_{X_p}(t_1, t_2)$

$$R_{X_p}(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 \qquad (5)$$

Démonstration.

- Si $t_1 = t_2$ alors Eq. (18) est bonne

$$E(X_p(t)^2) = Var(X_p(t)) + E(X_p(t))^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

- Si $t_1 < t_2$, les v.a. $X_p(t_1)$ et $X_p(t_2) - X_p(t_1)$ sont indépendantes car elles suivent des lois de poissons sur des intervalles disjoints.
  - $X_p(t_1) \sim N(0, t_1)$
  - $X_p(t_2) - X_p(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$
- On peut en déduire que

$$E(X_p(t_1)(X_p(t_2) - X_p(t_1)))) = E(X_p(t_1))E(X_p(t_2) - X_p(t_1)) = \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1)$$

or comme

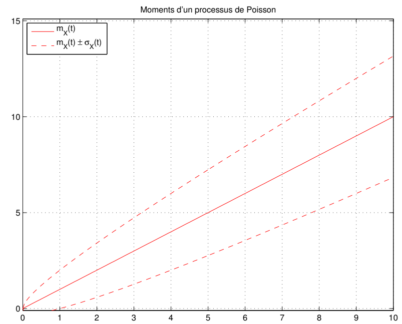
$$X_p(t_1)X_p(t_2) = X_p(t_1)(X_p(t_2) - X_p(t_1))) + X_p(t_1)^2$$

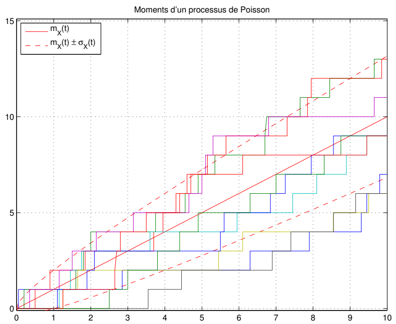
on retrouve

$$R_{X_p}(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1)$$

□

Exemple de réalisations

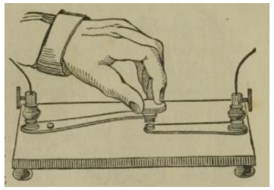


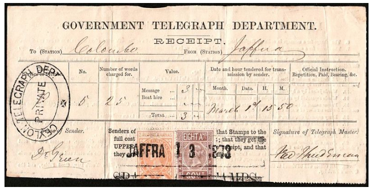


Processus de Poisson

- $\lambda = 1$
- $m_{X_p}(t) =$
- $Var(X_p(t)) =$

Basculateur poissonien





Définition

- Signal aléatoire obtenu à partir d'un processus de poisson $X_p(t)$:

$$X_{bp}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_p(t) \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } X_p(t) \text{ est impair} \end{cases} \tag{6}$$

- Signal oscillant entre la valeur 1 et -1.
- Également appelé signal du télégraphiste.
- Signal semi-aléatoire car la valeur en $t = 0$ est connue et fixée à 1.

Probabilités d'occurence de 1 et -1

Probabilité d'avoir la valeur 1 à l'instant t

$$\begin{aligned} P(X_{bp}(t) = 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(x_p(t) = 2k) \\ &= \\ &= e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t) \end{aligned} \tag{7}$$

avec $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Probabilité d'avoir la valeur -1 à l'instant t

$$P(X_{bp}(t) = -1) = e^{-\lambda t} \sinh(\lambda t) \tag{8}$$

avec $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Propriétés du basculateur poissonnien

Moyenne $m_{X_{bp}}(t)$

$$m_{X_{bp}}(t) = E(X_{bp}(t)) = \tag{9}$$

Variance $Var(X_{bp}(t))$

$$Var(X_{bp}(t)) = E(X_{bp}(t)^2) - E(X_{bp}(t))^2 = \tag{10}$$

Autocorrélation $R_{X_{bp}}(t_1, t_2)$ pour $t_1 \leq t_2$

$$R_{X_{bp}}(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

Signal stationnaire ?

Basculateur poissonnien aléatoire

Pour rendre la basculateur poissinien totalement aléatoire on définit :

$$\tilde{X}_{bp}(t) = AX_{bp}(t) \tag{11}$$

- A uniforme discrète sur $\{-1, 1\}$ avec une probabilité $1/2$: $A \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$.
- A et $X_{bp}(t)$ sont indépendantes.
- L'espérance devient

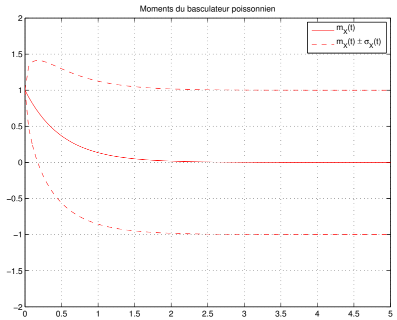
$$E(\tilde{X}_{bp}(t)) = E(A)E(X_{bp}(t)) =$$

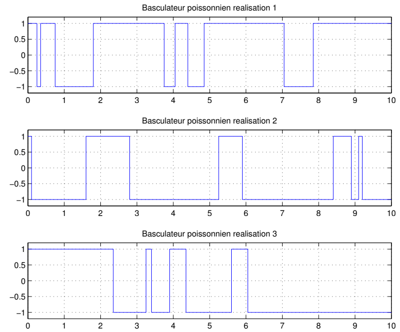
- Et la variance

$$Var(\tilde{X}_{bp}(t)) = E(\tilde{X}_{bp}(t)^2) - E(\tilde{X}_{bp}(t))^2 = \tag{12}$$

- L'auto-corrélation est inchangée.
- Le basculateur poissonnien aléatoire est donc

Exemple de réalisations





Basculateur poissonnien

- $\lambda = 1$
- $m_{X_{bp}}(t) =$
- $Var(X_{bp}(t)) =$

Historique de la marche aléatoire

The Problem of the Random Walk.

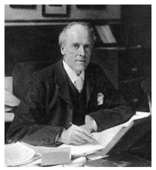
CAN any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

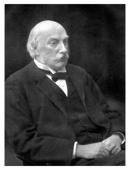
A man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after these n stretches he is at a distance between r and $r+\delta r$ from his starting point, O.

The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for *two* stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series in powers of $1/n$, when n is large.

KARL PEARSON.

The Gables, East Ilsley, Berks.





- Introduit par Karl Pearson en 1905 pour modéliser la migration des moustiques dans une forêt (Nature 72, 294 ; 318 ; 342 (1905)).
- Problème résolu par Lord Rayleigh qui lui donne l'approximation gaussienne.
- Remarque de Karl Pearson :

  " *The most probable place to find a drunken man who is at all capable of keeping on his feet is somewhere near his starting point !*" .

Marche aléatoire

Définition

Signal aléatoire discret définit récursivement par

$$X_{ma}(n) = X_{ma}(n-1) + sU_n = s\sum_{i=1}^{n} U_i$$

- $U_n \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ où les variable aléatoires U_n sont indépendantes.
- $X_{ma}(0) = 0$
- $s \in \mathbb{R}$ est le pas
- La valeur du signal aléatoire change à chaque instant n.
- Version continue de période T :

$$\tilde{X}_{ma}(t) = \{X_{ma}(n) | nT \leq t < (np+1)T\}$$

Propriétés de la marche aléatoire (1)

Probabilités à l'instant n

- À l'instant n, X_{ma} peut prendre les valeurs

$$X_{ma}(n) \in \{-ns, -(n+1)s, \dots, (n-1)s, ns\}$$

- Si les réalisation de U_n on données k fois $+1$ et $n-k$ fois -1 alors

$$X_{ma}(n) = ks - (n-k)s = ms, \qquad m = 2k - n$$

- On reconnaît la loi binomiale de probabilité $p = \frac{1}{2}$

$$P(X_{ma}(n) = ms) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} = C_n^k \frac{1}{2^n} \qquad k = \frac{m+n}{2} \tag{13}$$

Propriétés de la marche aléatoire (1)

Moyenne $m_{X_{ma}}(n)$

$$m_{X_{ma}}(n) = E(\sum_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=1}^{n} E(U_i) = \tag{14}$$

Variance $Var(X_{ma}(n))$

$$Var(X_{ma}(n)) = E(X_{ma}(n)^2) = E((\sum_{i=1}^{n} U_i)^2) = \tag{15}$$

Autocorrélation $R_{X_{ma}}(n_1, n_2)$ pour $n_1 < n_2$

$$R_{X_{ma}}(n_1, n_2) = E(X_{ma}(n_1) X_{ma}(n_2)) =$$

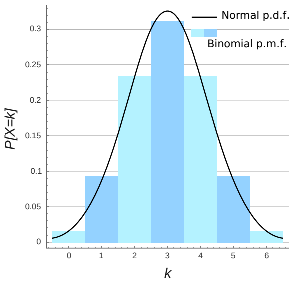
Signal stationnaire ?

Approximation pour n grand

Approximation de la loi binomiale

Quand n est grand, et que k est dans le voisinage $\sqrt{npq}$ de np, alors :

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2/2npq} \tag{16}$$

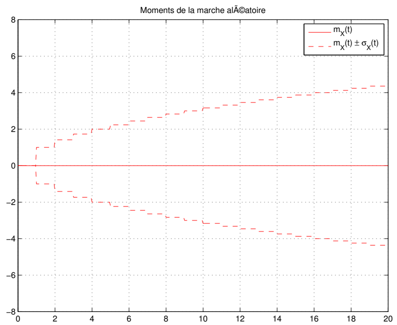


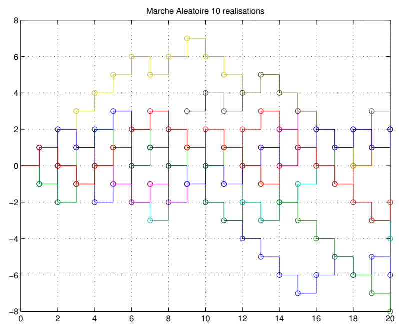
Application à la marche aléatoire

Dans notre cas $p = q = .5$ et m=$2k - n$ alors

$$P(X_{ma}(n) = ms) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}} e^{-m^2/2n} \tag{17}$$

Exemple de réalisations





Marche aléatoire

- $s = 1$
- $m_{X_p}(t) =$
- $Var(X_p(t)) =$

Signal aléatoire gaussien

Définition

Un signal aléatoire gaussien $X_G(t,w)$ est un signal aléatoire qui est complètement défini par une loi gaussienne.

- Soit le vecteur aléatoire suivant :

$$\mathbf{X}_G(w)^T = [X_G(t_1,w), X_G(t_2,w), \ldots, X_G(t_k,w)]^\top \quad (18)$$

- Alors la densité de probabilité d'un signal gaussien est

$$p_{\mathbf{X}_G}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}} e^{-\left(\frac{1}{2}(\mathbf{X}-m_{\mathbf{X}})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-m_{\mathbf{X}})\right)} \quad (19)$$

  avec le vecteur des moyenne $m_{\mathbf{X}}$ et la matrice de covariance Σ définis par

$$m_{\mathbf{X}} = [m_X(t_1), m_X(t_2), \ldots, m_X(t_k)]^\top \quad (20)$$

$$(\Sigma)_{i,j} = E(X_c(t_i,w)X_c(t_j,w)^*) = C_X(t_i,t_j) \quad (21)$$

Signal aléatoire gaussien (2)

Signal gaussien stationnaire

- **Moyenne**

$$m_{\mathbf{X}_G} = m_X[1,1,\ldots,1]^\top$$
$$m_{X_G}(t) = m_{X_G}$$

- **Covariance**

$$(\Sigma)_{i,j} = C_X(t_j - t_i) = C_X(\tau)$$

Discussion

- La loi Gaussienne est complètement caractérisée par ses deux premiers moments
- Dans le cas stationnaire alors m_X et $R_{X_G}(\tau)/C_{X_G}(\tau)$ sont suffisants pour connaître complètement la signal aléatoire..

Bruit gaussien

Définition

Le bruit gaussien est un signal aléatoire, dont la densité de probabilité suit une loi gaussienne :

$$X_B(t,w) \sim \mathcal{N}(0, \sigma(t)^2) \quad \forall i \quad (22)$$

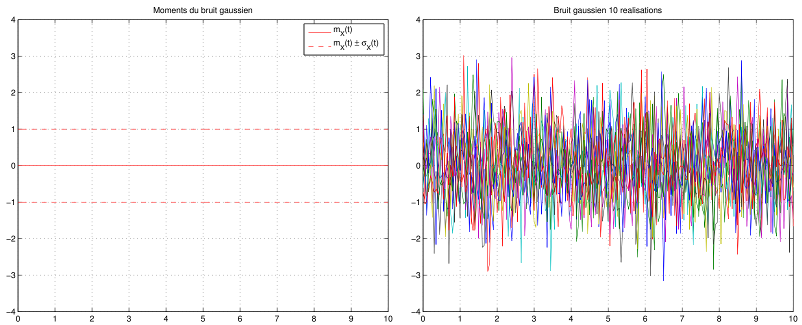
Bruit gaussien Indépendant et identiquement distribué (I.I.D.)

- Indépendant implique que $X_B(t_1,w)$ et $X_B(t_2,w)$ indép. pour $t_1 \neq t_2$.
- Identiquement distribué implique un signal stationnaire ($\sigma(t) = \sigma$)

$$m_{X_B}(t) = 0 \quad (23)$$
$$Var_{X_B}(t) = \sigma^2 \quad (24)$$
$$R_{X_B}(\tau) = C_{X_B}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) \quad (25)$$

- Signal complètement connu car moyenne et matrice de covariance connus.
- Bruit blanc : contient toutes les fréquences du spectre.

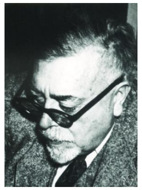
Exemple de réalisations



Bruit Gaussien

- $\sigma = 1$
- $m_{X_p}(t) = 0$
- $Var(X_p(t)) = \sigma^2$

Processus de Wiener



Historique

- En l'honneur de Norbert Wiener, fondateur de la cybernétique.
- Aussi appelé mouvement brownien (Robert Brown).
- Utilisé en physique statistique, économie, finances.

Définition

Le processus de Wiener est construit comme

$$X_w(t,w) = \lim_{T\to 0} \tilde{X}_{ma}(t,w) \qquad \text{s.c.} \quad s = \sqrt{T}$$

C'est un processus Gaussien caractérisé par 3 propriétés :

- $X(0,w) = 0$
- Le signal aléatoire certainement continu (avec une proba 1).
- Les incréments $X(t_2,w) - X(t_1,w)$ sont indépendants et suivent un loi gaussienne de type $\mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$.

Processus de Wiener (2)

Densité de probabilité

$$p_{X_w(t,w)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \tag{26}$$

Moyenne $m_{X_w}(t)$

$$m_{X_w}(t) = 0$$

Variance $Var_{X_w}(t)$

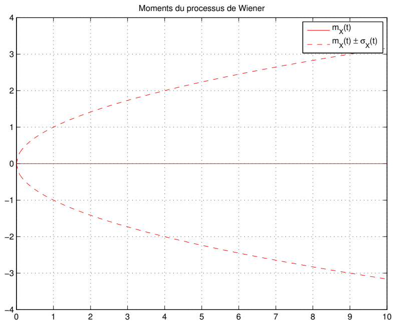
$$Var_{X_w}(t) = t$$

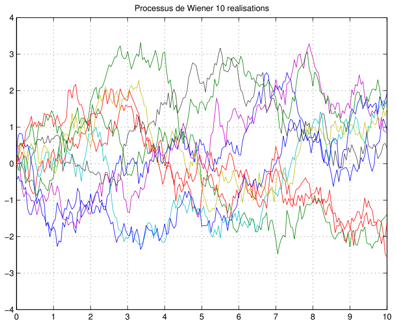
Autocorrélation $R_{X_w}(t_1,t_2)$ pour $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E(X(t1,w)X(t_2,w)] && (27)\\ &= E(X(t1,w)(X(t_2,w) - X(t_1,w) + X(t_1,w))) && (28)\\ &= E(X(t1,w)(X(t_2,w) - X(t_1,w))) + E(X(t_1,w)^2) = t_1 && (29)\end{aligned}$$

Signal stationnaire ?

Exemple de réalisations





Processus de Wiener

- $m_{X_p}(t) = 0$
- $Var(X_p(t)) = t$

Bibliographie

Cours fortement inspiré des références suivantes :

- **Traitement Statistique du Signal**, R. Herault, *INSA Rouen*.
`https://moodle.insa-rouen.fr/course/view.php?id=199`
- **Signaux Aléatoires**, J.-F. Bercher, *ESIEE*
`http://www.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly_alea.pdf`
- **Théorie du signal**, C. Jutten,
`http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Theorie_du_signal.pdf`
- **Probability, random variables and stochastic processes.**, A Papoulis