M1 - Signaux aléatoires

TD 3

Rémi Flamary, André Ferrari

Exercice 1

On considère le signal du TD 1 : $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance respective σ^2.

1. Calculer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de $x(t)$. Représenter l'allure de $S_x(f)$.
2. On considère le bruit $b(t)$ à moyenne nulle, indépendant de $x(t)$ et ayant pour densité spectrale de puissance $S_b(f) = \alpha^2 \exp(-|f|/b)$. Représenter $S_b(f)$.
3. Qu'elle est la puissance de $b(t)$?
4. On considère le signal $y(t) = x(t) + b(t)$. Calculer le rapport signal sur bruit P_x/P_b.
5. On désire réduire l'effet du bruit sur $y(t)$ par un filtre passe-haut de fonction de transfert $H(f) = j\beta_1 f/(1 + j\beta_2 f)$. On considère d'abord le cas où seul le bruit est présent : $y(t) = b(t)$. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance du signal $z(t)$ en sortie du filtre. Représenter l'allure de cette densité spectrale de puissance.
6. Expliquer comment calculer la puissance du signal en sortie du filtre.
7. On considère maintenant le cas sans bruit : $y(t) = x(t)$. Tracer la densité spectrale de puissance du signal en sortie du filtre. Que vaut la puissance de ce signal ?

Exercice 2

Un émetteur génère un signal aléatoire $x(t)$ supposé centré et stationnaire. Le signal reçu après transmission et réflexion double s'écrit :

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - \theta) \tag{1}$$

où θ est un retard constant et α un atténuation constante.

1. Calculer $\mathsf{E}[y(t)]$ puis $\mathsf{E}[y(t)y(t+\tau)]$. En déduire la fonction d'autocorrélation $r_{yy}(\tau)$ en fonction de celle de $x(t)$.
2. Calculer la puissance de $y(t)$ ainsi que sa densité spectrale de puissance en fonction de celle de $x(t)$.
3. Justifier à partir de l'équation (1) que $y(t)$ s'obtient par filtrage linéaire de $x(t)$. Donner la réponse en fréquence du filtre
4. Retrouvez l'expression de $S_y(f)$ par la formule des interférences.

Exercice 3

On considère le signal du TD 1 définit par définit par :

$$X(n) = Z(n) + \theta Z(n-1),\ n \in \mathbb{Z}$$

où $Z(n)$ est un bruit i.i.d. avec $Z(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Calculer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$.
2. Calculer directement la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ en utilisant la formule des interférences.

Exercice 4

On considère le signal du TD 2 définit par définit par :

$$X(n) = \phi X(n-1) + \theta Z(n),\ n \in \mathbb{Z}$$

où $Z(n)$ est iid avec $Z(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $Z(s)$ est indépendant de $X(n)$ pour $s > n$ (causalité).

1. Calculer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$.
2. Calculer directement la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ en utilisant la formule des interférences.