M1 - Signaux aléatoires

TD 4

Rémi Flamary

Exercice 1

Soit le signal $y(t)$ définit par

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_p t + \phi) \quad (1)$$

où $x(t)$ est un signal stationnaire modulant une porteuse sinusoïdale. $x(t)$ est de moyenne nulle, de corrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_x(f)$. ω_p est une constante et ϕ est uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. $x(t)$ et ϕ sont considérés comme indépendants.

1. Calculer la moyenne et la corrélation de $y(t)$ en fonction de $R_x(\tau)$.
2. $y(t)$ est il stationnaire au sens large ?
3. Calculer la densité spectrale de puissance de $y(t)$ en fonction de $S_x(f)$.
4. Représenter la densité spectrale de puissance.

Réponses de l'Exercice 1

1. Moyenne :

$$E[y(t)] = E[x(t)]\cos(\omega_p t + \phi) = 0$$

Corrélation :

$$\begin{aligned} E[y(t)y(t+\tau)] &= E[x(t)x(t+\tau)]E[\cos(\omega_p t + \phi)\cos(\omega_p(t+\tau) + \phi)] \\ &= R_x(\tau)\frac{1}{2}E[\cos(\omega_p\tau) + \cos(\omega_p(2*t+\tau) + 2*\phi)] \\ &= \frac{1}{2}R_x(\tau)\cos(\omega_p\tau) \end{aligned}$$

2. y est stationnaire au sens large (ordre 1 et 2).
3. Densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} S_y(f) &= TF[\frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_p\tau)] \\ &= \frac{1}{2}S_x(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - \omega_p/(2\pi)) + \delta(f + \omega_p/(2\pi))) \\ &= \frac{1}{4}(S_x(f - \omega_p/(2\pi)) + S_x(f + \omega_p/(2\pi))) \end{aligned}$$

4. Dessin.

Exercice 2

Soit le basculateur poissonnien aléatoire $\tilde{x}_{bp}$ vu en cours. On rappelle que ce signal est stationnaire à l'ordre 2 et que son autocorrélation est de la forme

$$R_{xbp}(\tau) = A^2 e^{-2\lambda|\tau|} \quad (2)$$

1. Tracer la fonction d'autocorélation.
2. Calculer sa densité spectrale de puissance et la tracer.

3. Soit le signal $y(t)$ suivant où $b(t)$ est un bruit gaussien IID de variance σ^2.
$$y(t) = \tilde{x}_{bt}(t) + b(t) \tag{3}$$
Calculer le rapport signal sur bruit de $y(t)$.
4. On applique à $y(t)$ un filtre parfait de fonction de transfert suivante
$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$
Calculer la puissance du bruit après filtrage.
5. Calculer la puissance du signal après filtrage.
6. Calculer le rapport signal sur bruit. Le tracer en fonction de f_c.
7. Quelle valeur de f_c maximise de RSB en conservant au moins $1/2$ de la puissance du signal.

Réponses de l'Exercice 2

1. Dessin.
2. DSP :
$$\begin{aligned} S_{xbp}(f) &= TF[A^2 e^{-2\lambda|\tau|}] \\ &= \frac{A^2/\lambda}{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} f^2} \end{aligned}$$
car $TF[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$.
3. RSB. $R_b(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$. $R_b(0) = \infty$ donc RSB=0.
4. Puissance du bruit filtré : $S_{bf}(f) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$$P_{bf} = \int_{-fc}^{+fc} \sigma^2 df = 2 f_c \sigma^2$$
5. Puissance du signal filtré : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
$$\begin{aligned} P_{xf} &= 2 \int_0^{fc} \frac{A^2/\lambda}{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} f^2} df \\ &= 2 \int_0^{fc\frac{\pi}{\lambda}} \frac{A^2/\lambda}{1+v^2} \frac{\lambda}{\pi} dv \\ &= \frac{2A^2}{\pi} \int_0^{fc\frac{\pi}{\lambda}} \frac{1}{1+v^2} dv \\ &= \frac{2A^2}{\pi} \arctan(\frac{f_c \pi}{\lambda}) \end{aligned}$$
6. $RSB(f_c) = \frac{A^2}{\pi\sigma^2 f_c} \arctan(\frac{fc\pi}{\lambda})$. Tracer sachant que $\arctan(x) \equiv x - x^3/3$ pour x petit.
7. On cherche le f_c le plus petit possible tel que $P_{bxf}(f_c) = P_x/2$.
$$\begin{aligned} \frac{2A^2}{\pi} \arctan(\frac{f_c \pi}{\lambda}) &= \frac{A^2}{2} \\ \arctan(\frac{f_c \pi}{\lambda}) &= \frac{\pi}{4} \\ f_c &= \frac{\lambda}{\pi} \tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\lambda}{\pi} \end{aligned}$$

Certains exercices sont inspirés très fortement des TD de Denis Arzelier
http://homepages.laas.fr/arzelier/