M1 - Signaux Aléatoires - TP1

Rémi Flamary, André Ferrari

— Pour faire ce TP il est absolument indispensable de connaître le cours sur les signaux aléatoires. Il est aussi nécessaire d'amener les notes de cours en TP.

— Le texte du TP contient entre crochets les fonctions spécifiques à utiliser.

— Tous les fichiers python commencent par l'importation des modules suivants :

```
import numpy as np
import scipy.signal
import scipy as sp
import pylab as pl
```

— Les commandes python seront écrites à la suite les unes des autres dans des fichiers (1 par partie du TP). Au fur et à mesure les commandes de plot seront commentées (#).

— Le rapport de TP ne devra pas dépasser deux pages, ni contenir de code ou capture d'écran. Vous devez y discuter ce que vous avez appris les les difficultés associées à chaque section du TP.

1 Avant propos

La caractérisation des signaux aléatoires à partir de leurs moments d'ordre 1 et 2 a été étudiée en cours. Dans le cas pratique où l'on mesure des signaux, ces moments ne sont pas connus. L'étude pratique des signaux aléatoire repose alors sur la propriété d'ergodicité : il est possible d'obtenir les moments d'un signal à partir d'une de ces réalisations en remplaçant les moyennes d'ensemble (par exemple $E[x(n)]$ par une moyenne temporelle. Ainsi pour les deux premiers moments :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n = E[x_n] \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1+k}^{N} x_n x_{n-k} = E[x_n x_{n-k}] \text{ pour } k > 0 \tag{2}$$

Trois remarques sont nécessaires :

1. Les deux équations précédentes n'ont un sens que dans le cas d'un signal stationnaire.
2. Les x_n étant des variables aléatoires, les limites des deux équations précédentes portent sur des quantités qui sont aléatoires. La notion de limite dans ce contexte sera précisée plus tard.
3. En pratique, on ne dispose pas d'un nombre infini de points. On se contentera d'enlever la limite, N représentant le nombre de points disponibles. Les sommes ainsi obtenues sont clairement aléatoires. On dit que l'on obtient une estimation du moment. On a l'habitude de noter la valeur estimée d'un paramètre a en mettant un chapeau : $\hat{a}$.

2 Bruit blanc échantillonné, notion d'estimation

1. Générer N=1024 échantillons d'un bruit blanc Gaussien échantillonné b_n ayant une moyenne de zéro et une variance de 1.2 [`np.random.randn`].

2. Tracer l'histogramme du signal avec 30 classes [`pl.hist`]. Renouveler plusieurs fois cette opération pour le même nombre de points. Renouveler plusieurs fois cette opération pour N=512 et N=2048 points. Conclusions.
3. Programmer l'estimation de l'autocorrélation de b_n [`np.correlate`] (mode='same'), et calculer le vecteur `tau=np.arange(N)-N//2` correspondant. Tracer l'auto-correlation [`pl.plot`] et la comparer à l'auto-corrélation théorique. Conclusions ?

3 Signal sinusoïdal bruité

1. Générer $N = 512$ points du signal $x_n = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$ où θ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$,$A = 1.2$ et $f_0 = 0.037$. Superposer sur la même figure les 100 premiers points de 20 réalisations du signal.
2. Calculer l'expression théorique de l'autocorrélation de x_n .
3. Tracer l'autocorrélation estimées de x_n , [`np.correlate`]. Comparer les autocorrélations estimées avec les autocorrélations théoriques. Pour cela superposer les deux sur une même figure.
4. On considère le signal $y_n = x_n + b_n$ où xn est la sinusoïde précédente et b_n le bruit définit plus haut. Tracer y_n . Quel est le rapport signal sur bruit ?
5. Calculer l'expression théorique de l'autocorrélation de y_n . Superposer dans une figure les autocorrélations théoriques et l'autocorrélation estimée. Expliquer ce résultat.
6. Tracer la densité spactrale de puissance estimée de y_n [`sp.signal.periodogram`]. L'axe des abscisses sera gradué pour $f \in [0, 1/2]$. Commenter les résultats.
7. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance théorique de x_n , $S_{xx}(f)$ et la tracer à coté de la sensité spectrale de puissance estimée. Conclusions.

4 Autres signaux aléatoires

Pour les signaux aléatoires stationnaires vus en TD suivant

— TD 1, Exercice 4

— TD 2, Exercice 2.

Effectuer les simulations suivantes :

1. Générer plusieurs réalisations du signal aléatoire.
2. Tracer l'estimation de l'autocorrélation ainsi que l'autocorrélation théorique. Les comparer.
3. Tracer leur densité spectrale de puissance théorique et estimée sur un nombre fini de points.