Signaux et systèmes continus

Rappels et définitions

R. Flamary

7 décembre 2015

Plan du cours

Définitions

Définition d'un signal

Soit $x(t)$ un signal temporel.

- $x(t)$ est une fonction du temps t.
- On dit que $x(t)$ est continu car $t \in \mathbb{R}$.
- Opposition à des signaux discrets (de type $x[n]$ avec n entier).
- Un signal modélise l'évolution temporelle d'une variable.

Exemples

- Note La à la flûte à bec.
- Signaux sonores (déplacement de l'air),
- Acquisition par microphone (signal electrique).
- Mesure de l'altitude lors d'un déplacement (variable z).

Energie et puissance

Puissance instantanée

La puissance instantané d'un signal $x(t)$ est

$$p_x(t) = |x(t)|^2 \tag{1}$$

Unité : Watt (W).

Énergie d'un signal

On définit l'énergie d'un signal $x(t)$ par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \tag{2}$$

et le signal et dit d'énergie finie si $E < \infty$.
Unité : Joule, Calorie ou Wattheure (J, Cal ou Wh, 1 calorie = 4.2 J).

Puissance moyenne

Puissance moyenne d'un signal

On définit la puissance moyenne d'un signal par

$$Pm = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (3)$$

- Si le signal est périodique, la puissance moyenne peut être calculé sur une période.
- La puissance est homogène à une énergie divisée par un temps.
- Notons qu'il existe aussi la valeur efficace qui est la racine carrée de la puissance moyenne.
- Un signal dénergie finie est de puissance moyenne nulle.
- Unité : Watt (W).

Exemple

Tension aux bornes d'une résistance

- $u(t)$ est la tension, $i(t)$ l'intensité et R la résistance.
- $u(t) = R.i(t)$ (loi d'Ohm).
- $u(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$ et O sinon, $R = 1$.

Puissance instantanée

$$p_x(t) = u(t) * i(t) = \frac{1}{R} u(t)^2 =$$

Énergie du signal

$$E = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt =$$

Puissance moyenne

$$Pm = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{TR} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |u(t)|^2 dt =$$

Notion de bruit

Définition

un phénomène perturbateur pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal.

Exemples

- Signaux Satellite et Astrophysique
  - Télécom : Signal satellite est signal, astro est le bruit
  - Astrophysique : Satellite est le bruit, astro est le signal
- Réseau EDF, pic à 50Hz quand on fait des mesures de tension.

Bruit additif

Le bruit additif est un bruit qui vient se rajouter à un signal.

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

$y(t)$ est le signal observé, $x(t)$ le signal qui nous intéresse et $b(t)$ le signal de bruit.

Rapport Signal sur bruit

Définition

Le rapport signal sur bruit est définit par :

$$R_{S/B} = \frac{P_S}{P_B} \quad \text{ou} \quad R_{S/B}(dB) = 10 \log_{10}(R_{S/B}) \quad (4)$$

avec P_S la puissance du signal et P_B la puissance du bruit

- Un processus d'acquisition doit avoir le meilleur RSB possible.
- Le Rapport signal sur signal + bruit est également utilisé.

$$R_{S/S+B} = \frac{P_S}{P_{X+B}}$$

.

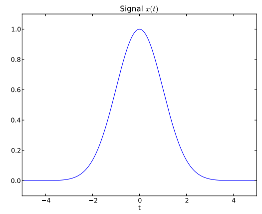
- Un filtrage permet d'améliorer le RSB quand les signaux sont différent en terme de contenu fréquentiel.

Propriétés des signaux

Signal Pair

$$x(t) = x(-t), \forall t$$

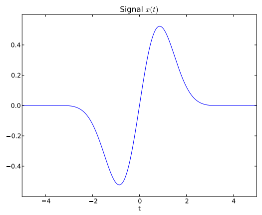
Exemple : $x(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$



Signal Impair

$$x(t) = -x(-t), \forall t$$

Exemple :
$x(t) = \sin(t)\exp(-\frac{t^2}{2})$



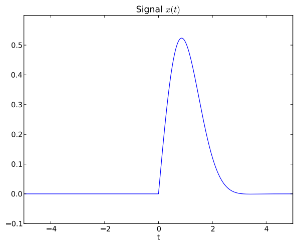
Propriétés des signaux (2)

Signal Causal

$$x(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Exemple :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \sin(t)\exp(-\frac{t^2}{2}) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



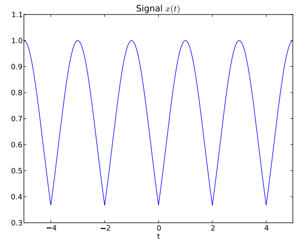
Signal Périodique

Périodique de période T si

$$x(t - kT) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Exemple : $x(t) =$

$$\begin{cases} \exp(-\frac{(t-1)^2}{2}) & 0 < t < T \\ \exp(-\frac{(t-kT-1)^2}{2}) & kT < t < (k+1)T \end{cases}$$



Tranformations des signaux

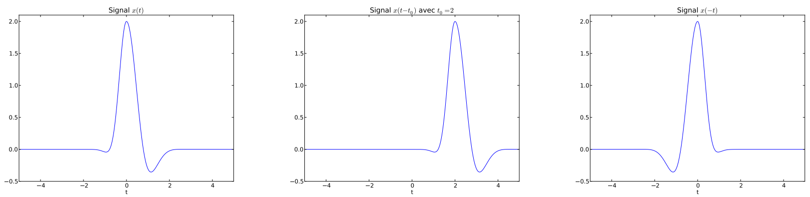
Décalage temporel

$$x(t) \rightarrow x(t - \tau)$$

Miroir temporel

$$x(t) \rightarrow x(-t)$$

Exemples



(a) Signal **(b)** Décalage temporel τ=2 **(c)** Miroir

Figure – Exemples de transformations

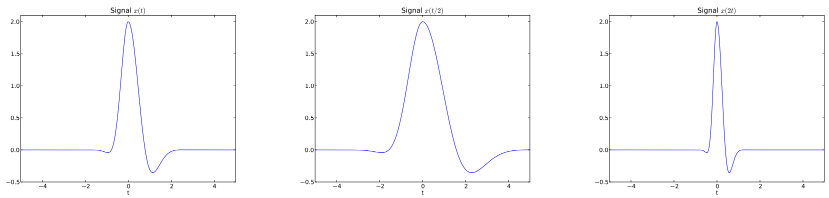
Transformation des signaux (2)

Changement d'échelle temporelle

$$x(t) \rightarrow x(Kt) \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

- Si $K < 0$ alors il y a également miroir temporel.
- Effet sur le contenu fréquenciel du signal.

Exemples



(a) Signal **(b)** Echelle $k = 0.5$ **(c)** Echelle $k = 2$

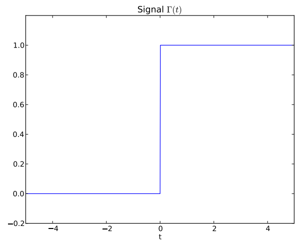
Figure – Exemples de changements d'échelle

Exemples de signaux

Échelon ou fonction de Heaviside

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/2 & \text{pour } t = 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

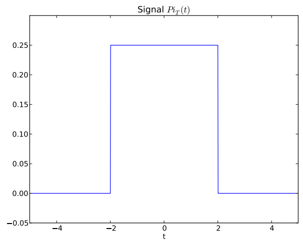
Exemple : On allume une ampoule.



Porte ou rectangle

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1/T & \text{pour } |t| < T/2 \\ 1/2T & \text{pour } |t| = T/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6)$$

- $\Pi(t) = \frac{1}{T}(\Gamma(t - \frac{T}{2}) - \Gamma(t + \frac{T}{2}))$.
- Signal d'énergie finie.

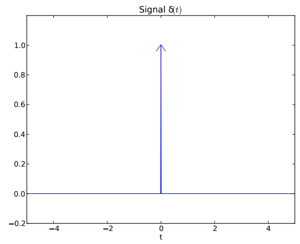


Exemples de signaux (2)

Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \Pi(t) \quad (7)$$

Pas une fonction mais une distribution.
Peut être vue comme la dérivée de l'échelon.
Exemple : coup de marteau.



- Propriétés : $\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (8)$$

- Souvent appelé fonction d'évaluation car

$$\langle \delta(t - t_0), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (9)$$

Exemples de signaux (3)

Exponentielle complexe

Soit le signal suivant :

$$e_z(t) = \exp(zt) \quad (10)$$

avec z un nombre complexe. Si $z = \tau + wi$ alors

$$e_z(t) = (\cos(w * t) + i * \sin(w * t)) \exp(\tau t)$$

Cas particuliers :

- $z = \tau$ réel, alors fonction exponentielle classique.

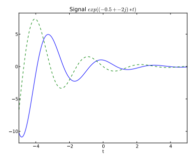
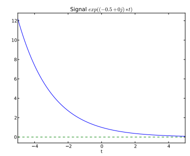
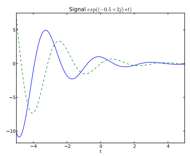
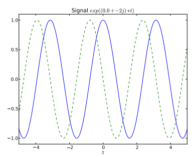
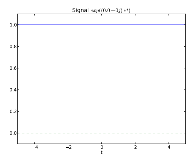
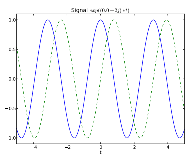
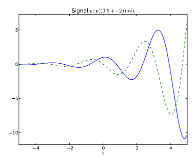
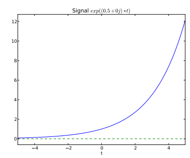
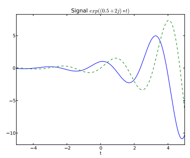
$$e_z(t) = \exp(\tau t)$$

- $z = wi$ imaginaire. alors

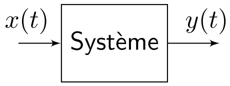
$$e_z(t) = \cos(w * t) + i * \sin(w * t)$$

Exemples de signaux (4)

Exponentielle complexe avec $z = \tau + wi$

$\tau \backslash w$	-2	0	2
-0.5			
0			
$.5$			

Rappels sur les systèmes



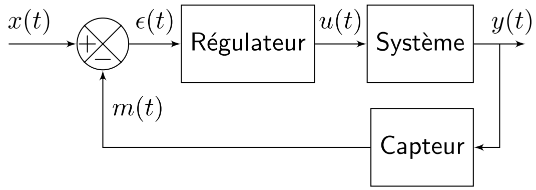
Définition

Un système est procédé qui résulte en une transformation d'un signal. Il est définit par une fonction de transfert qui décrit la relation entre le signal d'entrée $x(t)$ le signal de sortie $y(t)$.

Cas d'utilisation des systèmes

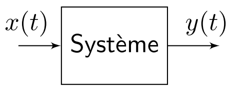
- Identification de système.
- Synthèse de système (filtrage).
- Synthèse de système bouclé (automatique, contrôle).

Systèmes bouclés



- En automatique, on cherche à contrôler la sortie d'un système.
- Synthèse d'un régulateur qui contrôle « au mieux » la sortie.
- On s'intéresse aux propriété du système une fois que le régulateur est inséré dans la boucle.
- Attention aux problèmes de stabilité, propriété des systèmes.

Propriétés des systèmes



Toutes les propriétés suivantes sont définie sur le système $x(t) \rightarrow y(t)$.

Mémoire

le système est sans mémoire si la sortie à l'instant t ne dépend que de l'entrée à l'instant t. $y(t) = f(x(t))$.

Exercice

Les systèmes décrits ci-dessous sont-il avec ou sans mémoire.

- $y(t) = K * x(t)$ tension aux bornes d'une résistance avec x une intensité.
- $y(t) = x(t - \tau)$.
- $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$.

Propriétés des systèmes (2)

Causalité

Un système est causal si sa sortie à un instant t ne dépends que de l'entré à l'instant t et avant.

- Un système sans mémoire est causal.
- $y(t) = x(t + 1)$ pas causal ! ! !
- Systèmes physiques causaux (circuits électroniques)

Stabilité

Pour qu'un système soit stable, il faut que :

$$\text{Si } |x(t)| < M_x, \forall t, \quad \text{alors } |y(t)| < M_y, \forall t \tag{11}$$

- Propriété essentielle des systèmes.
- C'est la capacité du système de revenir à un état d'équilibre.
- Systèmes physiques stables.

Propriétés des systèmes (2)

Invariance temporelle

L'invariance temporelle d'un système implique que

$$x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$$

- Un décalage temporel de l'entrée implique le même décalage pour la sortie.
- La réponse du système ne dépend pas du temps.

Linéarité

Un système est linéaire si pour deux systèmes quelconques

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \text{ et } x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

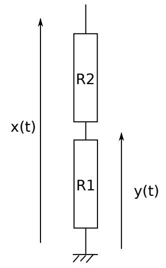
alors

1. $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$
2. $ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$ pour $a \in \mathbb{R}$

Propriété très utile pour la simplification des calculs.

Exemples de systèmes

Système diviseur



Montage diviseur classique.

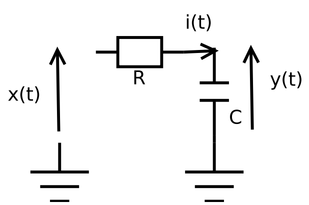
- Loi du système :

$$y(t) =$$

- Propriétés

Exemples de systèmes (2)

Système RC



Montage diviseur classique.

- Loi du système :

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

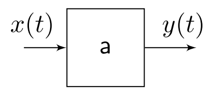
$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(v)dv \quad \rightarrow \quad Cy'(t) = i(t)$$

$$x(t) =$$

- Propriétés

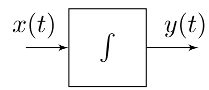
Schémas blocs

Facteur multiplicatif



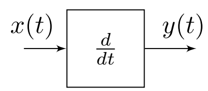
$$y(t) = ax(t)$$

Intégrateur



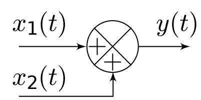
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$$

Dérivateur



$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Sommateur/différence



$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Définition

- Classe de systèmes très communs en pratique.
- Propriétés (rappels) :
  - Linéarité
$$x_1(t) + ax_2(t) \to y_1(t) + ay_2(t)$$
  - Invariance en temps
$$x(t-\tau) \to y(t-\tau)$$

Exemples

- Montage électronique à base de résistances/condensateurs/bobines.
- Mécanique de Newton.
- Mécanique des fluides

Systèmes linéaires invariants dans le temps (2)

Les équation différentielles ordinaires

Le système est donc définit par une équation de la forme :

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \cdots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (12)$$

- Les systèmes définis par des EDO sont une classe importante des SLIT.
- Également appelées équations différentielles linéaires à coefficients constants.
- n est le nombre de dérivées pour $y(t)$ et m pour $x(t)$.
- La sortie du système peut être obtenue en résolvant l'équation (12)

Systèmes linéaires invariants dans le temps (3)

Réponse impulsionnelle

Un SLIT est définit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ qui est la réponse $y(t)$ du système pour une impulsion de dirac $x(t) = \delta(t)$ en entrée.

Convolution

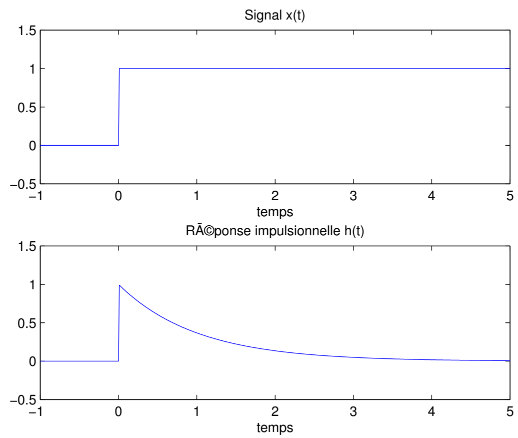
La convolution définit la relation entre l'entrée et la sortie d'un SLIT à travers la relation

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (13)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (14)$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système.

- Si $x(t) = \delta(t)$ alors
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t)$$
- $\delta(t)$ est l'élément neutre de l'opérateur de convolution.

Exemple de convolution



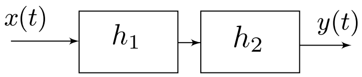
Soit $x(t) = \Gamma(t)$ un échelon. et un système dont la réponse impulsionnelle est de la forme $h(t) = \Gamma(t)e^{-at}$ avec $a = 1 > 0$.

Propriétés des SLIT

Mise en série

Soit deux SLIT $h_1(t)$ et $h_2(t)$ mis en série.
Le système équivalent est

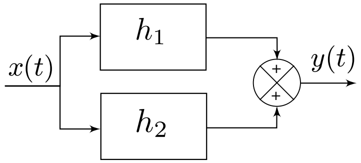
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



Mise en parallèle

Soit deux SLIT $h_1(t)$ et $h_2(t)$ mis en parallèle.
Le système équivalent est

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



Stabilité

Si un SLIT est stable alors

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \text{ est bornée}$$

Propriétés des SLIT (2)

Causalité

Un système SLIT est causal si sa réponse impulsionnelle est nulle pour $t < 0$:

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse du système à une entré de type échelon, c'est à dire pour

$$x(t) = \Gamma(t)$$

La sortie du système peut ainsi se mettre sous la forme suivante :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(v) dv \tag{15}$$

Exemples de systèmes linéaires

Amplificateur
La réponse impulsionnelle d'un système amplificateur parfait de coefficient a.

$$h(t) = \tag{16}$$

Condensateur
Soit $x(t)$ une intensité et $y(t)$ la tension au borne d'un condensateur.
Le système condensateur donne la loi suivante :

$$y(t) = \tag{17}$$

On peut donc en conclure que la réponse impulsionnelle est de la forme :

$$h(t) = \tag{18}$$

Filtre moyenneur
Un système qui retourne la moyenne du signal d'entrée sur une fenêtre temporelle de taille T
Soit le système définit par la réponse impulsionnelle $h(t) =$.

Ressources bibliographiques

- *Fonctions de transfert*,
  J.-P. Folcher, Université de Nice Sophia Antipolis, 2012.
- *Signals and Systems*,
  S. Haykin, B van Veen, Whiley, 2007.
- *Signals and Systems*,
  A. Oppenheim, AS Willsky, SH Nawab, Prentice-Hall, 1983.
- *Théorie du signal*,
  C. Jutten, Université Joseph Fourier, 2009.
- Signals and systems,
  Wikibooks : `http://en.wikibooks.org/wiki/Signals_and_Systems`