

Signaux et systèmes continus

Représentation fréquentielle

R. Flamarly

7 décembre 2015

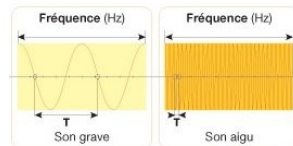
Notion de fréquence

Qu'est ce qu'une fréquence ?

- La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée
- C'est donc l'inverse de la période $f = 1/T$
- La fréquence est mesurée en Hertz (= 1/seconde)

Exemple audio

- Sons graves = basses fréquences
- Sons aigus = hautes fréquences



Plan du cours

Rappels signaux et systèmes

Caractérisation fréquentielle

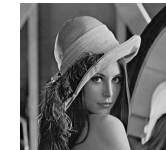
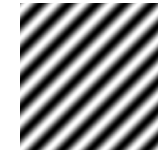
- Décomposition en séries de Fourier
- Transformée de Fourier
 - Définition
 - Propriétés de la Transformée de Fourier
 - Signaux périodiques ou à énergie infinie
- Réponse en fréquence des systèmes linéaires
 - Fonction de transfert
 - Fréquence et pulsation
- Représentation de la réponse en fréquence
 - Diagramme de Bode
 - Diagramme de Black
 - Diagramme de Nyquist
- Exemples, systèmes du premier et second ordre
 - Système dérivateur/intégrateur
 - Système du premier ordre
 - Système du second ordre

Applications

Notion de fréquence (2)

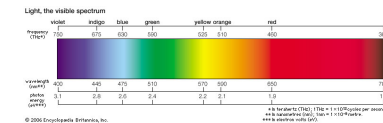
Exemple des images

- Surfaces = basses fréquences
- Contours = hautes fréquences



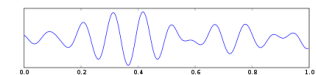
Exemple des couleurs

- Ondes lumineuses
- Couleur dépend de la fréquence



Exemple des ondes cérébrales

- Ondes alpha (8-12 Hz) (sommeil)
- Ondes beta (12-30 Hz) (mouvement, réflexion)



Caractérisation fréquentielle

Pour les signaux

- ▶ Représenter un signal par rapport à son contenu fréquentiel.
- ▶ Changement de base permettant une meilleure interprétation.
- ▶ $x(t) \rightarrow X(f)$

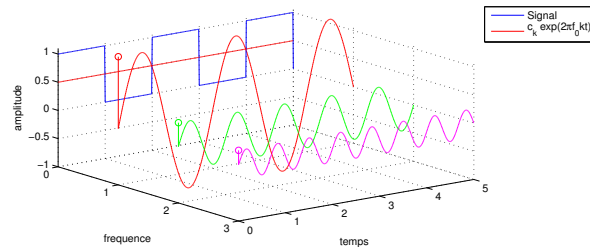
Pour les systèmes

- ▶ Représenter les transformations opérées par le système selon la fréquence.
- ▶ Réponse en fréquence.
- ▶ $h(t) \rightarrow H(f)$

Outils

- ▶ Décomposition en séries de Fourier (Signaux périodiques).
- ▶ Transformée de Fourier (signaux à énergie finie).
- ▶ Transformée de Laplace.

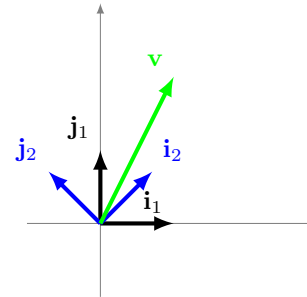
Décomposition en séries de Fourier



Principe

- ▶ Exprimer un signal périodique sous la forme d'une somme de sinus et cosinus.
- ▶ Changement de base dans l'espace fonctionnel (temporel $\rightarrow$ fréquentiel)

Rappel changement de base



- ▶ Base 1 : $B_1 = (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$
- ▶ Projection :
 - ▶ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_1 \rangle = 1$
 - ▶ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{j}_1 \rangle = 2$
$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{j}_1 = (1, 2)_1$$
- ▶ Base 2 : $B_2 = (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$
 - ▶ $\mathbf{i}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)_1$
 - ▶ $\mathbf{j}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)_1$
- ▶ Projection :
 - ▶ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_2 \rangle = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 - ▶ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{j}_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$$\mathbf{v} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)_2$$

Décomposition en séries de Fourier (2)

Décomposition en séries trigonométriques

On peut écrire $x(t)$ périodique de période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ sous la forme

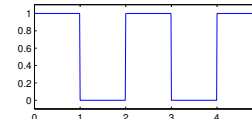
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

où a_k et b_k sont les coefficients de Fourier obtenus par les équations

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Exemple

- ▶ Fonction créneau $T_0 = 2T$



- ▶ $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Pi_T(t - \frac{T}{2} - 2iT)$
- ▶ $a_0 = 1, a_k = 0 \quad \forall k > 0$
- ▶ $b_k = \frac{2}{\pi(2k-1)}$

Décomposition en séries de Fourier (3)

Décomposition complexe

Un signal périodique $x(t)$ de période fondamentale T_0 peut être représenté en une somme d'exponentielles complexes :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

où les coefficients c_k sont appelés **les coefficients de Fourier complexes** et s'obtiennent comme

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Liens entre les décompositions

Les coefficients a_k et b_k et les coefficients de Fourier complexes sont reliés par

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

On remarque que si $x(t)$ est un signal paire alors les termes en b_k sont nulles, tandis que si $x(t)$ est impair alors les $a_k = 0$.

Transformée de Fourier

Définition

Soit $x(t)$ une fonction à variable réelle, on appelle la transformée de Fourier de $x(t)$, notée $X(f)$, la fonction définie comme :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

On notera également la paire $x(t)$, $X(f)$ comme

$$x(t) \rightarrow X(f)$$

Et la transformée de Fourier s'écrit sous la forme

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$$

De la série à la transformée

Séries de Fourier

- ▶ Expriment une fonction dans la base des exponentielles complexes de fréquences

$$\frac{k}{T} \quad \forall k \text{ entier}$$

- ▶ Limitées aux signaux périodiques de période T .

Transformée de Fourier

- ▶ Cas non périodique.
- ▶ Un signal peut être considéré comme un signal périodique avec $T \rightarrow \infty$
- ▶ Les exponentielles complexes de la base sont séparées par des fréquences qui se resserrent infiniment.
- ▶ L'échantillonnage fréquentiel devient continu.
- ▶ Somme $\rightarrow$ Intégrale.

Transformée de Fourier (2)

Transformée de Fourier inverse

Si elle existe la transformée de Fourier inverse de $X(f)$ est :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

- ▶ Pour que la TF inverse existe $x(t)$ doit être à énergie finie

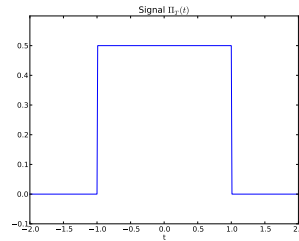
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- ▶ Dans ce cours on supposera les conditions satisfaites pour l'existence de la transformée inverse.

Exemples de transformées de Fourier

Signal porte

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1/T & \text{pour } |t| < T/2 \\ 1/2T & \text{pour } |t| = T/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1)$$

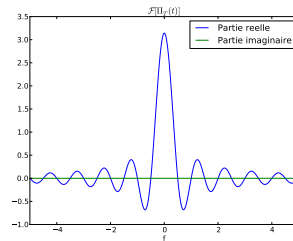


La transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}[\Pi_T(t)] =$$

avec

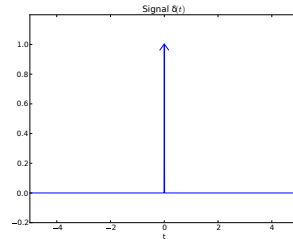
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{et } \text{sinc}(0) = 1$$



Exemples de transformées de Fourier (3)

Impulsion de dirac

$$x(t) = \delta(t)$$



La transformée de Fourier est

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt =$$

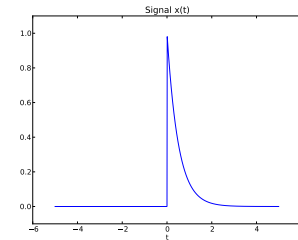
- $\delta(t)$ est une distribution (pas d'énergie finie).
- $\delta(t)$ contient toutes les fréquences.

Exemples de transformées de Fourier (2)

Signal exponentielle décroissante

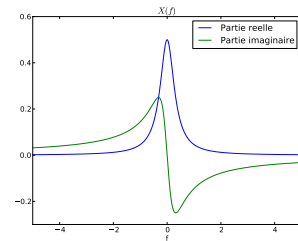
$$x(t) = e^{-at} \Gamma(t)$$

avec $a > 0$.



La transformée de Fourier est

$$X(f) =$$



Propriétés de de Transformée de Fourier

Linéarité

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux de TF respectives $X_1(f)$ et $X_2(f)$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$$

Démonstration. Découle naturellement de la propriété de linéarité de l'intégrale.

Décalage temporel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, soit $x(t - t_0)$ une translatée de $x(t)$ alors, on a :

$$x(t - t_0) \rightarrow e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$$

Démonstration. Changement de variable dans l'intégrale.

Propriétés de de Transformée de Fourier (2)

Décalage fréquentiel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \rightarrow X(f - f_0)$$

En multipliant un signal par une exponentielle complexe de fréquence f_0 , on translate sa transformée de Fourier de f_0 .

Démonstration. Regrouper les exponentielles dans l'intégrale.

Changement d'échelle

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors, pour $a \neq 0$

$$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Démonstration. Traiter les cas $a > 0$ et $a < 0$ séparément.

Propriétés de de Transformée de Fourier (4)

Parité

- Si un signal $x(t)$ est un signal réel et pair alors $X(f)$ est réelle et paire.
- Si un signal $x(t)$ est un signal réel impair alors $X(f)$ est imaginaire pure et impaire.

Convolution

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux de transformée de Fourier respectives $X_1(f)$ et $X_2(f)$.

La transformée de Fourier du produit de convolution entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est

$$x_1 * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \rightarrow X_1(f) X_2(f)$$

Propriétés de de Transformée de Fourier (3)

Dérivation

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$, on a alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j2\pi f X(f)$$

Intégration

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$ avec $\int x(t) dt = 0$ on a alors

$$\int x(t) dt \rightarrow \frac{1}{j2\pi} f X(f)$$

Signal conjugué

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$ et $x^*(t)$ son conjugué. On a alors

$$x^*(t) \rightarrow X^*(-f)$$

Illustration des propriétés

Les propriétés vues précédemment peuvent être utilisées pour éviter de calculer l'intégrale de la TF.

On rappelle que

$$\mathcal{F}[\Pi_T(t)] = \text{sinc}(\pi f T)$$

Exemple 1

Soit

$$x(t) = \frac{1}{2} \Pi_1(t - 2.5) + \Pi_3(t - 2.5)$$

En utilisant les propriétés de linéarité et de décalage temporel, on obtient

$$X(f) =$$

Exemple 2

Soit $x(t) = \Pi_T(t) e^{j2\pi f_0 t}$, par la propriété de décalage temporel, on a alors

$$X(f) =$$

La dualité de la Transformée de Fourier

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$.
En utilisant la définition de la TF inverse, on peut écrire

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f(-t)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} df$$

Le dernier terme de l'égalité correspond à la transformée de Fourier de la fonction $X(f)$. En intervertissant les variables temporelles t et les variables fréquentielles f , on a donc si $x(t) \rightarrow X(f)$ alors

$$X(t) \rightarrow x(-f)$$

Exemple

Pour la fonction porte $\Pi_T(t)$:

$$\begin{aligned} \Pi_T(t) &\rightarrow \text{sinc}(\pi f T) \\ \text{sinc}(\pi T t) &\rightarrow \end{aligned}$$

Signaux périodiques ou à énergie infinie (2)

TF de l'impulsion de dirac (suite)

La propriété de décalage fréquentielle permet de trouver que

$$e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \delta(f - f_0)$$

Ainsi, grâce à la linéarité de la transformée de Fourier, on a :

$$x(t) = \sum_k e^{j2\pi f_k t} \rightarrow \sum_k \delta(f - f_k)$$

TF du cosinus

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

TF d'un signal périodique

$$x(t) = \sum_k c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \rightarrow \sum_k c_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

Signaux périodiques ou à énergie infinie

Signaux périodiques

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec } f_0 > 0$$

- ▶ Signaux d'énergie infinie.
- ▶ Comportent clairement des composante fréquentielles (f_0 pour le cosinus)
- ▶ Utilisation de la théorie des distributions (pas l'objet de ce cours).

TF de l'impulsion de dirac

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi ft} df = 1$$

La propriété de dualité nous donne

$$1 \rightarrow \delta(f)$$

Interprétation de la transformée de Fourier

Représentation fréquentielle

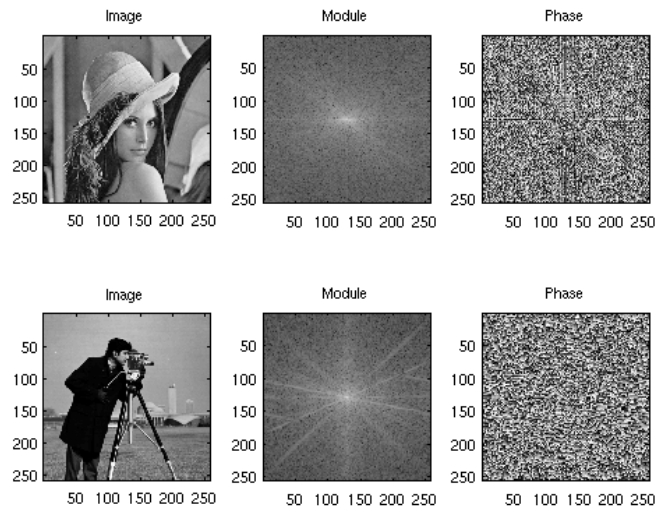
- ▶ La TF représente le contenu fréquentiel d'un signal.
- ▶ $|X(f)|$ représente l'amplitude d'un signal sinusoïdal.
- ▶ $\text{Arg}(X(f))$ représente la phase d'un signal sinusoïdal.
- ▶ Si le signal $x(t)$ est réel, alors $X(f) = X(-f)^*$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)| e^{j2\pi(f t + \text{Arg}(X(f)))} df \quad (2)$$

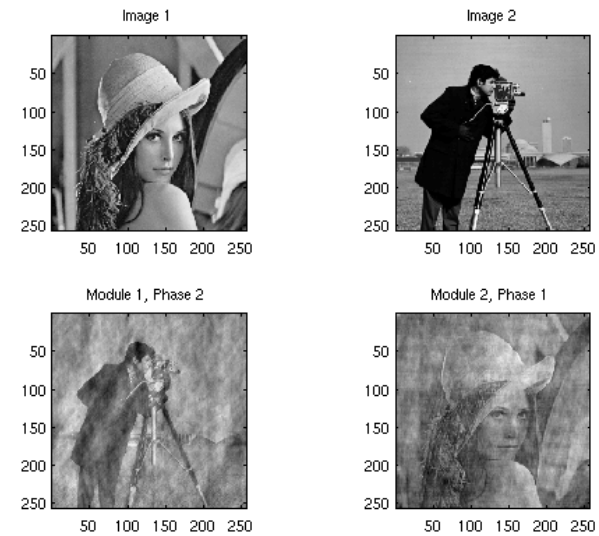
$$= X(0) + 2 \int_{0+}^{+\infty} |X(f)| \cos(j2\pi(f t + \text{Arg}(X(f)))) \quad (3)$$

- ▶ Le module et l'argument de la TF permettent d'identifier à la fois le contenu fréquentiel du signal et de déphasage correspondant.

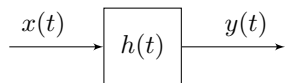
Exemples de TF 2D



Exemples de TF 2D (2)



Réponse en fréquence des systèmes linéaires



Définition

Réponse d'un système à un signal d'entrée contenant une fréquence unique.

Fonction de transfert

Pour un SLIT tel que $y(t) = (x * h)(t)$, la TF d'une convolution donne

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (4)$$

il est donc facile de déduire que la transformation est de la forme :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (5)$$

et $H(f)$ s'appelle la fonction de transfert du système.

Fonction de transfert

Réponse à une entrée mono-fréquence

- Système linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$.
- Signal en entrée de la forme $x(t) = e^{2j\pi f_0 t}$.
- Signal de sortie :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{2j\pi f_0 h(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{2j\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-2j\pi f_0 h\tau} d\tau \\ &= e^{2j\pi f_0 t} H(f_0) = x(t)H(f_0) \end{aligned}$$

- Un signal contenant une unique fréquence f_0 est donc multiplié par $H(f_0)$.
- En pratique il est multiplié par $|H(f_0)|$ et déphasé de $\text{Arg}(H(f_0)) = \angle(H(f_0))$

Fonction de transfert (2)

Gain statique (fréquence nulle)

Gain complexe qui est appliqué à un signal constant lorsqu'il traverse le système. Il s'obtient soit à partir de la fonction de transfert du système

$$K = H(0)$$

soit à partir de sa réponse impulsionnelle

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$$

qui correspond en effet à la transformée de Fourier pour une fréquence f nulle.

Fonction de transfert d'une EDO

Equation différentielle ordinaire

Soit le système décrit par l'équation suivante :

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

En utilisant les propriétés de la TF on peut obtenir la TF d'une dérivée n ième

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^{(n)} x(t)}{dt^n} \right] = (2i\pi f)^n X(f) = (iw)^n X(w)$$

Ce qui nous donne la forme suivante pour un système défini par une EDO

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{b_0 + b_1 jw + \dots + b_m (jw)^m}{a_0 + a_1 jw + \dots + a_n (jw)^n} \quad (6)$$

Fréquence et pulsations

- ▶ La Transformée de Fourier est une fonction de la fréquence f .
- ▶ Représentation classique permettant de connaître la réponse à une fréquence en Hz.
- ▶ On utilise également une autre représentation proportionnelle à la fréquence, la pulsation w exprimée en rad/s.
- ▶ La pulsation est liée à la fréquence par la relation

$$w = 2\pi f \quad f = \frac{w}{2\pi}$$

- ▶ Le passage de $H(f)$ à $H(w)$ se fait de manière évidente par changement de variable.

Représentation de la réponse en fréquence

Interprétation de la fonction de transfert

- ▶ La fonction de transfert (FT) d'un système donne des informations sur les transformations dues à la traversée du système.
- ▶ Grandeurs pouvant être étudiées :

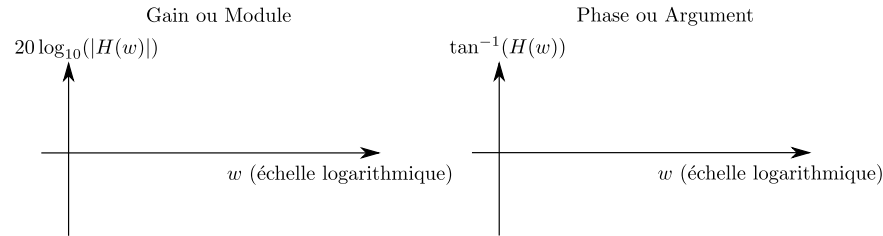
$$\begin{aligned} H(w) &= \text{Re}(H(w)) + j\text{Im}(H(w)) \\ &= |H(w)| e^{j\text{Arg}(H(w))} \end{aligned}$$

- ▶ $|H(w)|$ module de la fonction de transfert.
- ▶ $\text{Arg}(H(w)) = \angle H(w) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(H(w))}{\text{Re}(H(w))} \right)$ phase en radian.

Méthodes de représentations

- ▶ Diagramme de Bode.
- ▶ Diagramme de Black.
- ▶ Diagramme de Nyquist.

Diagramme de Bode



Définition

Le diagramme de Bode d'un système $H(w)$ est composé de deux tracés :

- le gain (ou amplitude) en décibels (dB).

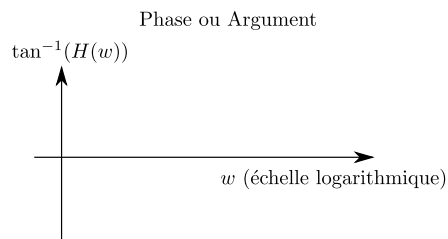
$$G(w) = 20 \log_{10} (|H(w)|)$$

- la phase en degré, donnée par

$$\Phi(w) = \text{Arg}(H(w)) = \angle |H(w)|$$

L'échelle des pulsations est logarithmique et permet un tracé très lisible, car composé majoritairement de tronçons linéaires.

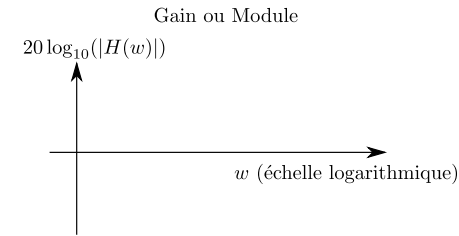
Diagramme de Bode (3)



Tracé de la phase

1. Calcul de la fonction de transfert $H(w)$.
2. Calcul de la phase $\Phi(w) = \arg(H(w))$.
3. Droite caractéristique basse fréquence : $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w)$
4. Droite caractéristique haute fréquence : $\lim_{w \rightarrow \infty} \Phi(w)$
5. Calcul de la phase pour les points importants du système.

Diagramme de Bode (2)



Tracé du Module

1. Calcul de la fonction de transfert $H(w)$.
2. Calcul du module $|H(w)|$.
3. Expression du gain $G(w) = 20 \log_{10}(|H(w)|)$
4. Droite caractéristique basse fréquence : $\lim_{w \rightarrow 0} G(w)$
5. Droite caractéristique haute fréquence : $\lim_{w \rightarrow \infty} G(w)$
6. Calcul du gain pour les points importants du système.

Exemples : passe haut, passe bas, passe bande.

Propriétés du diagramme de Bode

L'utilisation du logarithme et de l'argument permet d'obtenir simplement le diagramme pour des combinaisons de systèmes.

Multiplication

Si deux SLITS $H_1(w)$ et $H_2(w)$ sont mis en série, alors le système équivalent est $H(w) = H_1(w)H_2(w)$ et

- $G(w) = G_1(w) + G_2(w)$
- $\Phi(w) = \Phi_1(w) + \Phi_2(w)$

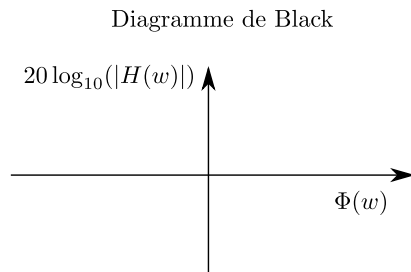
Division

Si un SLIT peut être mis sous la forme $H(w) = \frac{H_1(w)}{H_2(w)}$ alors

- $G(w) = G_1(w) - G_2(w)$
- $\Phi(w) = \Phi_1(w) - \Phi_2(w)$

Ceci peut être utilisé pour tracer le diagramme d'un système EDO.

Diagramme de Black



Définition

Le diagramme de Black (ou de Nichols) est une représentation paramétrée de $H(w)$ dans un repère comprenant le Gain $20 \log_{10} |H(w)|$ et la phase $\Phi(w)$.

- ▶ Condensé des deux courbes du diagramme de Bode.
- ▶ On trace le Module en fonction de la phase.
- ▶ Se trace en suivant le diagramme de Bode le long de la variation de w .

Exemples de systèmes

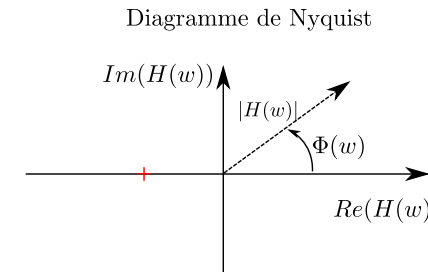
Étapes

1. Description du système
2. Calcul de la fonction de transfert
3. Diagramme de Bode

Systèmes étudiés

- ▶ Système dérivateur
- ▶ Système intégrateur
- ▶ Système du premier ordre
- ▶ Système du second ordre
- ▶ Cas général

Diagramme de Nyquist



Définition

Le diagramme de Nyquist est une représentation paramétrée de $H(w)$ dans un repère comprenant sa partie réelle $Re(H(w))$ et sa partie imaginaire $Im(H(w))$.

- ▶ On trace la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de $H(w)$.
- ▶ S'obtient en traçant une courbe le long de la pointe du vecteur d'amplitude $|H(w)|$ faisant un angle $\Phi(w)$ avec l'axe des réels.
- ▶ Utilisé pour étudier la stabilité des systèmes.

Système dérivateur (1)

- ▶ Système

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- ▶ Fonction de transfert

$$H(f) = 2i\pi f$$

- ▶ Diagramme de Bode

Module

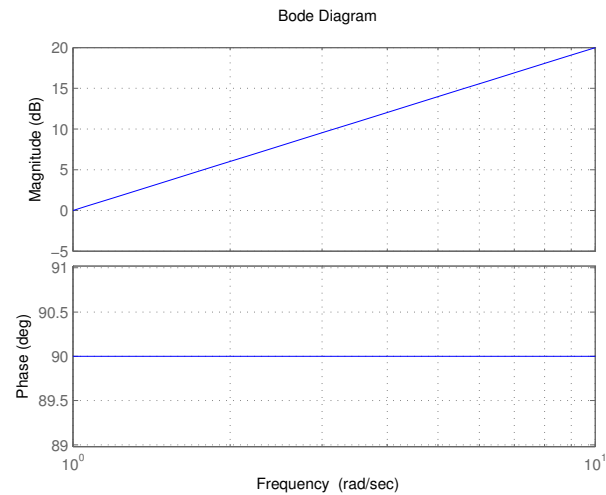
1. $H(w) =$
2. $|H(w)| =$
3. $G(w) =$
4. $\lim_{w \rightarrow 0} G(w) =$
5. $\lim_{w \rightarrow \infty} G(w) =$
6. En $w = 1$, $G(w) =$

Argument

1. $H(w) =$
2. $\Phi(w) =$
3. $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w) =$
4. $\lim_{w \rightarrow \infty} \Phi(w) =$

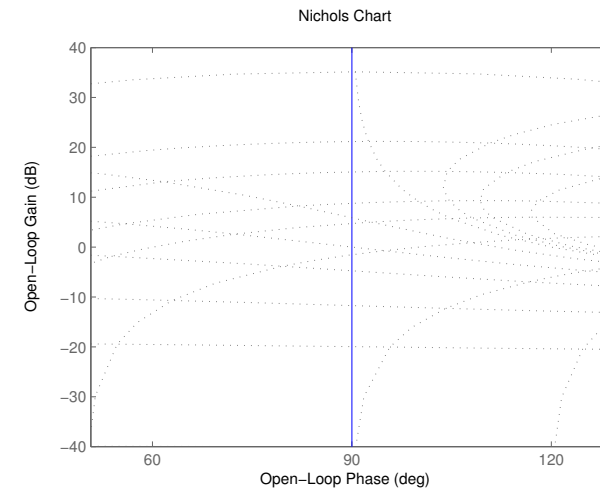
Système dérivateur (2)

Diagramme de Bode



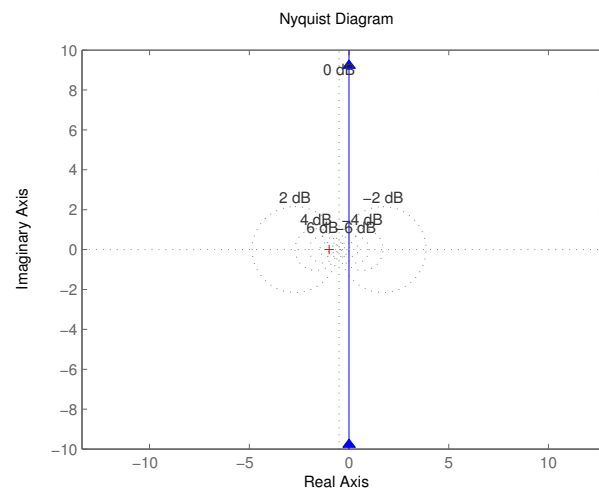
Système dérivateur (3)

Diagramme de Black



Système dérivateur (4)

Diagramme de Nyquist



Système intégrateur (1)

► Système

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

► Fonction de transfert

$$H(f) = \frac{1}{2i\pi f}$$

► Diagramme de Bode

Module

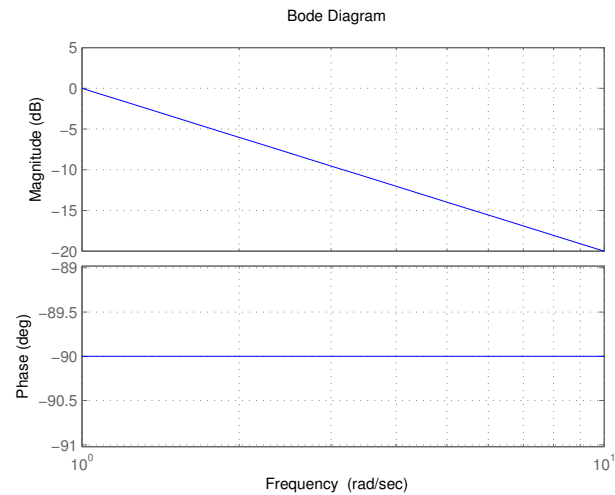
1. $H(w) =$
2. $|H(w)| =$
3. $G(w) =$
4. En $w = 1$, $G(w) =$

Argument

1. $H(w) =$
2. $\Phi(w) =$
3. $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w) =$
4. $\lim_{w \rightarrow \infty} \Phi(w) =$

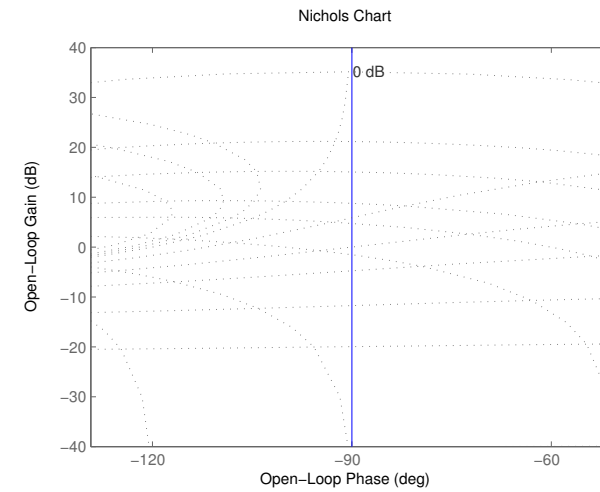
Système intégrateur (2)

Diagramme de Bode



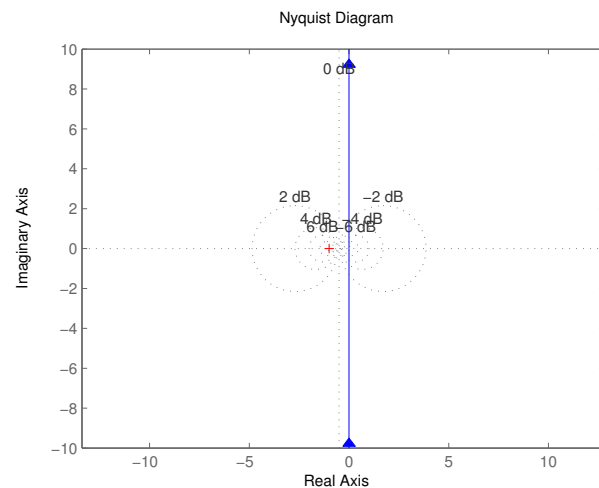
Système intégrateur (3)

Diagramme de Black



Système intégrateur (4)

Diagramme de Nyquist



Système dérivateur haute fréquence (1)

► Système

$$y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

► Fonction de transfert

$$H(f) = 1 + 2i\pi f$$

► Diagramme de Bode

Module

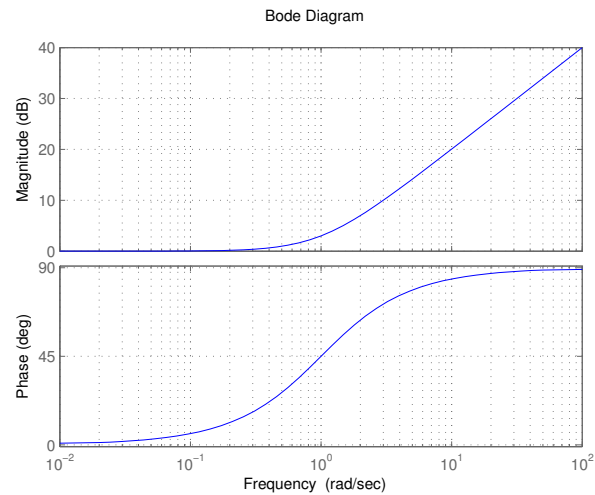
1. $H(w) =$
2. $|H(w)| =$
3. $G(w) =$
4. $\lim_{w \rightarrow 0} G(w) =$
5. $\lim_{w \rightarrow \infty} G(w) =$
6. En $w = 1$, $G(w) =$

Argument

1. $H(w) =$
2. $\Phi(w) =$
3. $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w) =$
4. $\lim_{w \rightarrow \infty} \Phi(w) =$
5. $\Phi(1) =$

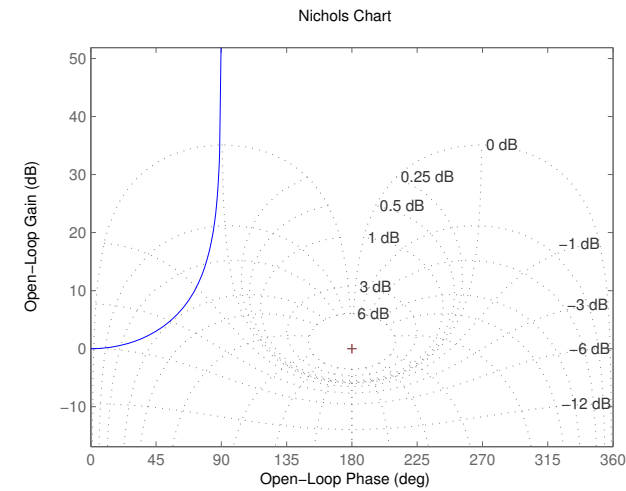
Système dérivateur haute fréquence (2)

Diagramme de Bode



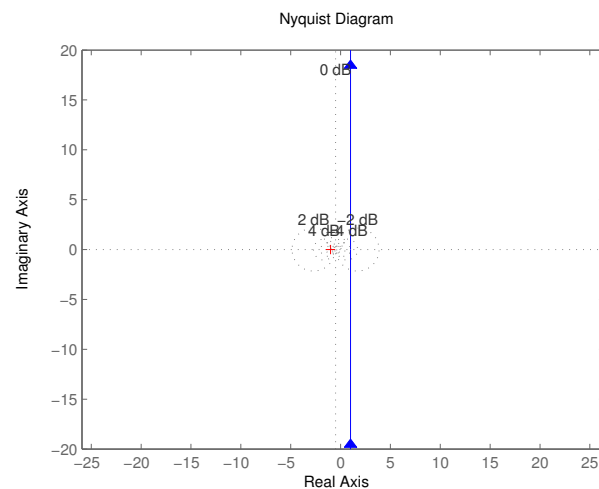
Système dérivateur haute fréquence (3)

Diagramme de Black



Système dérivateur haute fréquence (4)

Diagramme de Nyquist



Fonction de transfert des circuits électroniques

Principe de calcul

La loi d'Ohm peut simplement être étendue à d'autres composants que la résistance en utilisant les impédances complexes.

Système linéaire $i(t) \rightarrow u(t)$ donne

$$U(w) = H(w)I(w) = Z(w)I(w)$$

Résistance

- $u(t) = Ri(t)$
- $U(w) = RI(w)$
- $Z_R = R$

Condensateur

- $u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(u) du$
- $U(w) = \frac{1}{jCw} I(w)$
- $Z_R = \frac{1}{jCw}$

Bobine

- $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
- $U(w) = jLw I(w)$
- $Z_L = jLw$

Le calcul de fonction de transfert de système électroniques complexes peut donc se faire en utilisant les méthodes de calculs classiques.

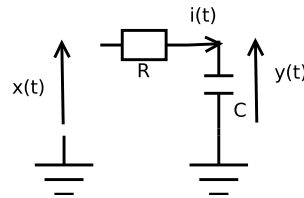
Système du premier ordre (1)

► Système

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(v) dv$$

$$x(t) = RCy'(t) + y(t)$$



► Fonction de transfert

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} =$$

► A partir des impédances complexes

$$Y(w) = Z_c I(w) \quad \text{et} \quad X(w) =$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} =$$

Système du premier ordre (2)

Système normalisé

On reformule souvent le système sous la forme suivante :

$$H(w) = \frac{1}{1 + j \frac{w}{w_0}} \quad (7)$$

avec pour le système précédent $w_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$.

Diagramme de Bode

Module

$$1. H(w) =$$

$$2. |H(w)| =$$

$$3. G(w) =$$

$$4. \lim_{w \rightarrow 0} G(w) =$$

$$5. \lim_{w \rightarrow \infty} G(w) =$$

$$6. \text{En } w = w_0, G(w) =$$

Système du premier ordre (3)

Diagramme de Bode

Argument

$$1. H(w) =$$

$$2. \Phi(w) =$$

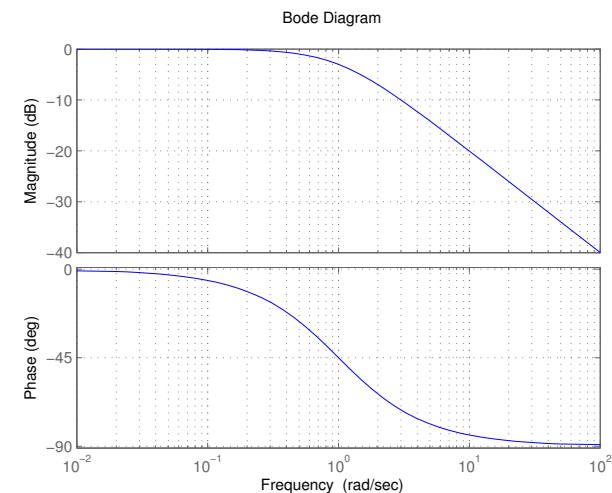
$$3. \lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w) =$$

$$4. \lim_{w \rightarrow \infty} \Phi(w) =$$

$$5. \begin{aligned} \text{En } w = w_0, \Phi(w) = \\ \text{en } w = 10w_0, \Phi(w) = \\ \text{en } w = .1w_0, \Phi(w) = \end{aligned}$$

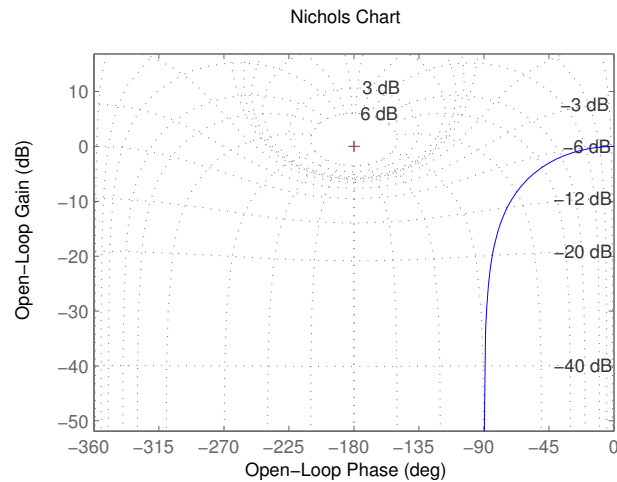
Système du premier ordre (4)

Diagramme de Bode



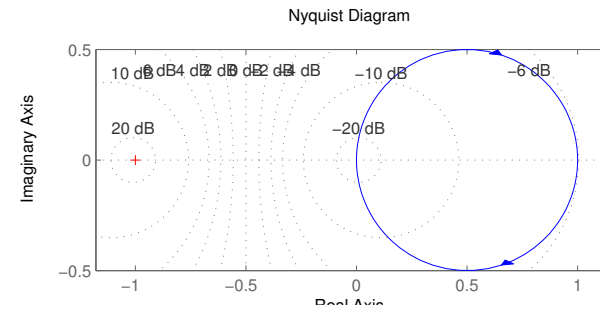
Système du premier ordre (5)

Diagramme de Black



Système du premier ordre (6)

Diagramme de Nyquist

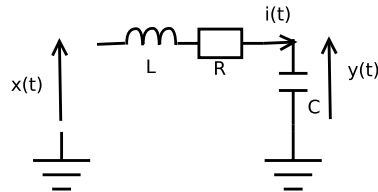


Système du second ordre (1)

► Impédance complexe

$$Y(w) = Z_c I(w)$$

$$X(w) = (Z_L + Z_R + Z_C) I(w)$$



► Fonction de transfert

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{Z_C}{Z_L + Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{jCw}}{\frac{1}{jCw} + R + jLw}$$

► Expression normalisée

$$H(w) = \frac{1}{1 + RCjw + LC(jw)^2} = \frac{k w_n^2}{w_n^2 + 2z w_n(jw) + (jw)^2}$$

- k gain statique du système : $k =$
- z coefficient d'amortissement du système : $z =$
- w_n pulsation propre (ou naturelle) du système : $w_n =$

Système du second ordre (2)

Système EDO

Le système du second ordre est associé à un système EDO de la forme

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2z w_n \frac{dy(t)}{dt} + w_n^2 y(t) = k w_n^2 x(t) \quad (8)$$

Forme factorisée

Un système du second ordre peut être factorisé sous la forme

$$H(w) = \frac{k w_n^2}{(jw - c_1)(jw - c_2)} \quad (9)$$

avec

$$c_1 = \quad (10)$$

$$c_2 = \quad (11)$$

les valeurs c_1 et c_2 sont appelées les pôles de la fonction de transfert

Système du second ordre (3)

Réponses du système pour $z > 1$

- ▶ On a des coefficients c_1 et c_2 réels.
- ▶ La TF peut se décomposer sous la forme suivante

$$H(w) = \frac{M}{jw - c_1} - \frac{M}{jw - c_2} \quad (12)$$

avec $M = \frac{w_n}{2\sqrt{z^2 - 1}}$,

- ▶ La réponse impulsionnelle du système est

$$h(t) = M(e^{c_1 t} - e^{c_2 t})\Gamma(t)$$

- ▶ Et la réponse indicielle sous la forme suivante

$$e(t) = \left(1 + M \left(\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2}\right)\right) \Gamma(t)$$

Système du second ordre (5)

Réponses du système pour $z < 1$

- ▶ Dans ce cas là, l'atténuation est plus faible et des oscillations apparaissent.
- ▶ Ces oscillations viennent du fait que pour $z < 1$ les coefficients c_1 et c_2 sont complexes.

$$h(t) = M(e^{c_1 t} - e^{c_2 t})\Gamma(t)$$

- ▶ La réponse indicielle est de la forme

$$h(t) = \frac{w_n e^{-z w_n t}}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(w_n t \sqrt{1 - z^2}) \Gamma(t)$$

Qui est un sinus ayant une amplitude décroissante exponentiellement.

Système du second ordre (4)

Réponses du système pour $z = 1$

La TF devient :

$$H(w) = \frac{k w_n^2}{(jw + w_n)^2} \quad (13)$$

ce qui est une multiplication de deux systèmes du premier ordres.

La réponse impulsionnelle de ce type de système se met sous la forme

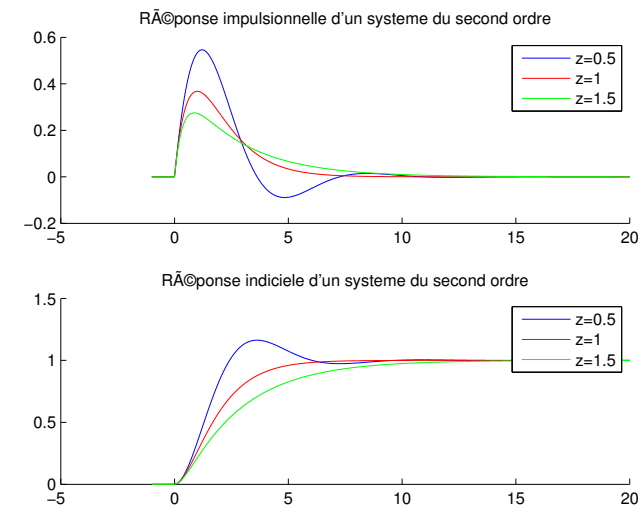
$$h(t) = w_n^2 t e^{-w_n t} \Gamma(t)$$

et la réponse indicielle est de la forme

$$e(t) = (1 - e^{-w_n t} - w_n t e^{-w_n t}) \Gamma(t)$$

Système du second ordre (6)

Réponses impulsionnelles et indicielles



Système du second ordre (7)

Diagramme de Bode

Pour tracer le diagramme de bode, on utilise une normalisation

$$H(w) = \frac{k}{\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2 + 2z\left(\frac{jw}{w_n}\right) + 1} \quad (14)$$

Module

1. $H(w) = \frac{k}{\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2 + 2z\left(\frac{jw}{w_n}\right) + 1}$.
2. $|H(w)| = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4z^2\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}}$.
3. $G(w) = 20\log_{10}(|H(w)|) = -10\log_{10}\left(\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4z^2\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right) + 20\log(k)$
4. $\lim_{w \rightarrow 0} G(w) = 20\log(k)$
5. $\lim_{w \rightarrow \infty} G(w) = -10\log_{10}\left(\frac{w^4}{w_n^4}\right) = -40\log_{10}(w) + 40\log_{10}(w_n)$
6. En $w = w_0$, $G(w) = -20\log_{10}(2z) + 20\log(k)$.

Système du second ordre (9)

Diagramme de Bode

Argument

1. $H(w) = H(w) = \frac{k}{\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2 + 2z\left(\frac{jw}{w_n}\right) + 1}$.
2. $\Phi(w) = \arg(H(w)) = -\arg\left(\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2 + 2z\left(\frac{jw}{w_n}\right) + 1\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2z\frac{w}{w_n}}{1 - \frac{w^2}{w_n^2}}\right)$.
3. $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w) = 0$
4. $\lim_{w \rightarrow \infty} \Phi(w) = -\pi(-180^\circ)$
5. En $w = w_0$, $\Phi(w) = -\tan^{-1}(1) = -90^\circ$,

Système du second ordre (8)

Module (2)

- Le module de la fonction de transfert pour $z < \sqrt{2}/2$ a un maximum qui se situe à la pulsation

$$w_{max} = w_n \sqrt{1 - 2z^2}$$

- La valeur du module à cette pulsation est

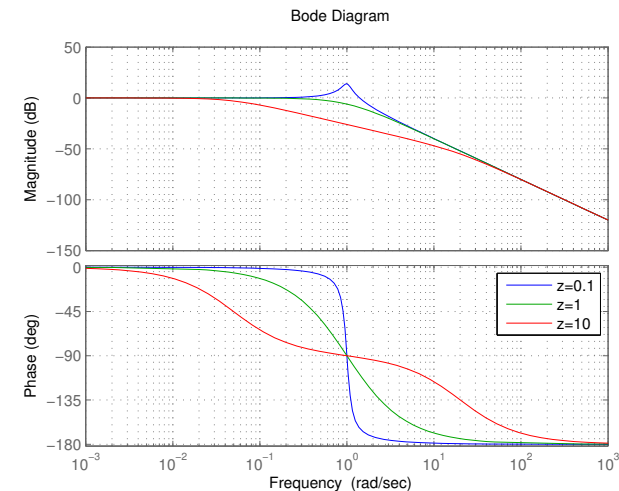
$$|H(w_{max})| = \frac{k}{2z\sqrt{1 - z^2}}$$

- La pulsation de coupure à -3dB est égale à

$$w_{-3} = w_n \sqrt{1 + 2z^2 + \sqrt{2 - 4z^2 + 4z^4}}$$

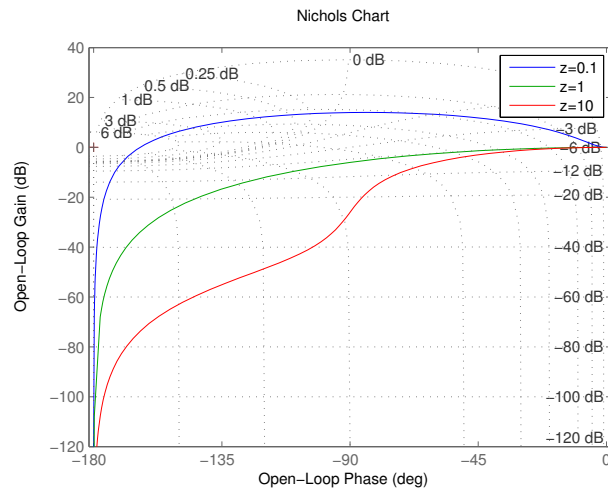
Système du second ordre (10)

Diagramme de Bode



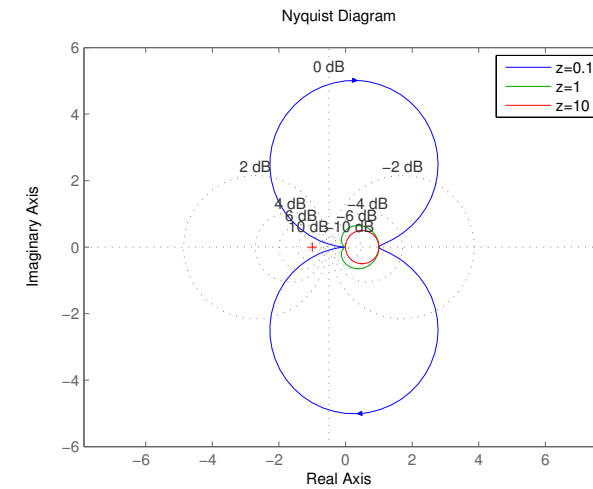
Système du second ordre (11)

Diagramme de Black



Système du second ordre (12)

Diagramme de Nyquist



Cas général

Pour tout système linéaire mis sous la forme suivante

$$G(w) = K_{(0)} \cdot \frac{(1 + \frac{jw}{w_0})_{(1)} \cdot (1 - \frac{jw}{w_0})_{(2)} \cdot (1 + \frac{2zjw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2})_{(3)} \cdot (1 - \frac{2zjw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2})_{(4)} \cdots}{(1 + \frac{w}{w_0})_{(5)} \cdot (1 + \frac{2zjw}{\omega_n} + \frac{(jw)^2}{\omega_n^2})_{(6)} \cdots}$$

Le diagramme de Bode peut être obtenu en utilisant le tableau

terme	module en dB	argument
(0)	cf. cours	cf. cours
(5)	cf. cours	cf. cours
(6)	cf. cours	cf. cours
(1)	= - module de (5)	= - phase de (5)
(3)	= - module de (6)	= - phase de (6)
(2)	= module de (1)	= - phase de (1)
(4)	= module de (3)	= - phase de (3)

La forme factorisée s'obtient en effectuant une factorisation polynomiale (voir cours de J.P. Folcher)